Esercizi proposti IV lezione

1) Calcolare i prodotti tra matrici $A \cdot B$ e $B \cdot A$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Il prodotto tra due matrici si può effettuare solo se il numero di colonne della prima (A), sia uguale al numero di righe della seconda (B).

Nel nostro caso, quindi, possiamo effettuare il prodotto $A \cdot B$ e $B \cdot A$, poiché entrambe sono matrici 3×3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 12+0+0 & 12+0+0 \\ 0-1+3 & 3+2+0 & 3+0+14 \\ 0+0+12 & -1+0+0 & -1+0+56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 12 \\ 2 & 5 & 17 \\ 12 & -1 & 55 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0+3-1 & 0+1+0 & 0+1+4 \\ -12+6+0 & 0+2+0 & 0+2+0 \\ 36+0-14 & 0+0+0 & 0+0+56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -6 & 2 & 2 \\ 22 & 0 & 56 \end{pmatrix}$$

2) TROVARE DUE MATRICI DI ORDINE TRE NON NULLE IL CUI PRODOTTO È LA MATRICE NULLA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

LE DUE MATRICI SONO NON NULLE, POICHÉ HANNO ALMENO UN ELEMENTO DELLA MATRICE NON NULLO

$$C = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 1+0-1 & 1+0-1 \\ 1+0-1 & 1+0-1 & 1+0-1 \\ 1+0-1 & 1+0-1 & 1+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IL RISULTATO DEL PRODOTTO DELLE DUE MATRICI, DA COME RISULTATO UNA MATRICE NULLA.

LA MATRICE NULLA, È UNA MATRICE DOVE TUTTI GLI ELEMENTI A_{ij} SONO $= 0$

3) CALCOLARE LA TRASPOSTA DI A, LA TRASPOSTA DI B, LA TRASPOSTA DI $A+B$ E LA TRASPOSTA DI $A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 14 \end{pmatrix} = {}^tB \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 18 \end{pmatrix} = {}^t(A+B) \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 12 \\ 2 & 5 & 17 \\ 12 & -1 & 55 \end{pmatrix} = {}^t(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 12 & 5 & -1 \\ 12 & 17 & 55 \end{pmatrix}$$

DEF: TRASPOSTA DI UNA MATRICE;

SI DICE TRASPOSTA DI A, E SI INDICA CON ${}^tA$, LA MATRICE DI TIPO (n,m) OTTENUTA DA A SCAMBIANDO ORDINATAMENTE LE RIGHE CON LE COLONNE

DEF: SOMMA DI DUE MATRICI;

DICIAMO SOMMA DI A E B LA MATRICE $C = (a_{ij} + b_{ij})$ I CUI TERMINI SONO LA SOMMA DEI TERMINI AVENTI LA STESSA POSIZIONE IN A ED IN B

4) CALCOLARE IL SOTTOSPAZIO T DELLE MATRICI ANTISIMMETRICHE DI ORDINE 2 NELLO SPAZIO VETTORIALE SUI REALI DELLE MATRICI QUADRATE DI ORDINE 2 AD ELEMENTI REALI. DETERMINARE LA DIMENSIONE DI T ED UNA SUA BASE.

A È ANTISIMMETRICA SE $A = -{}^tA$ E DI ORDINE 2 VUOL DIRE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}, \text{ QUINDI } A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

T È L'INSIEME DELLE MATRICI ANTISIMMETRICHE DI ORDINE 2 E DIPENDE DA UN SOLO PARAMETRO a_{12}, QUINDI LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO T DELLE MATRICI SIMMETRICHE DI ORDINE 2 È 1: $\dim T = 1$ ED UNA SUA BASE È $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5) CALCOLARE LA DIMENSIONE ED UNA BASE DEL SOTTOSPAZIO DELLE MATRICI DIAGONALI DI ORDINE 3

SIA D UNA MATRICE DIAGONALE GENERICA DI ORDINE 3

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

D DIPENDE DA TRE PARAMETRI QUINDI LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO DELLE MATRICI DIAGONALI DI ORDINE 3 È 3

UNA BASE DI TALE SOTTOSPAZIO È:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

6) STABILIRE SE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ È INVERTIBILE. DETERMINARE LA MATRICE INVERSA DI $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = 0$

LA MATRICE A NON È INVERTIBILI POICHÉ IL DET = 0

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad |B| = 3$

LA MATRICE B È INVERTIBILE

LA MATRICE INVERSA SI TROVA CALCOLANDO IL COEFFICENTE ALGEBRICO DI TUTTI GLI ELEMENTI PRESENTI ALL'INTERNO DELLA MATRICE.

$B_{11} = 3 \qquad B_{12} = 1 \qquad B_{21} = 0 \qquad B_{22} = 1$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} & \frac{0}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$