

## Geometria

I lezione del **27 febbraio 2019**

Presentazione del corso.

Nozioni e notazioni: concetti primitivi di insieme, elemento ed appartenenza.

Insiemi numerici: i numeri naturali  $\mathbb{N}$ , gli interi  $\mathbb{Z}$ , i numeri razionali  $\mathbb{Q}$ , i numeri reali  $\mathbb{R}$  e l'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ . Prodotto cartesiano di due insiemi.

Spazio vettoriale sui reali. Il prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

Sottospazi. Esempi. Legge di annullamento del prodotto negli spazi vettoriali ed applicazioni.

### Esercizi proposti

- 1) Quali dei seguenti sottoinsiemi del campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  sono sottospazi vettoriali?
  - a)  $W_1 = \left\{ \text{multipli interi di } \frac{1}{5} \right\}$
  - b)  $W_2 = \{ \text{insieme dei numeri interi} \}$
  - c)  $W_3 = \{ \text{insieme dei numeri razionali} \}$ .
  
- 2) Quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sono sottospazi vettoriali?
  - i)  $V_1 = \{ (x, y) : x = y \}$
  - ii)  $V_2 = \{ (x, y) : y = x + 2 \}$
  - iii)  $V_3 = \{ (x, y) : (x, y) = a(1, 2), a \text{ appartenente al campo dei numeri reali} \}$ , ossia le coppie  $(a, 2a)$  con  $a$  variabile in  $\mathbb{R}$ .
  - iv)  $V_4 = \{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0 \}$
  
- 3) Si consideri il vettore  $v=(1,2)$  di  $\mathbb{R}^2$  e si trovi un vettore  $w$  tale che  $123 \cdot (v+w)=(0,0)$ .
  
- 4) Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^3$  costituito dalle terne ordinate di numeri reali.
  - (a) Verificare che  $\mathbb{R}^3$  è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, così definite:  
 $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z') \quad \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$   
 $a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall a \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Verificare che  $\mathbb{R}^3$  non è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, così definite:  
 $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x'+1, y+y', z+z') \quad \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$   
 $a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall a \in \mathbb{R}$ .

Il lezione **28 febbraio 2019**

**Argomenti** della seconda lezione di Geometria: Operazioni con i sottospazi: intersezione, unione e somma di sottospazi.

Combinazione lineare di vettori. Vettori linearmente indipendenti (l.i.) e l.d. Generatori di uno spazio vettoriale. Base di uno spazio vettoriale. Componenti di un vettore rispetto ad una base. Basi canoniche. Criterio per la lineare indipendenza. Dimensione di uno spazio vettoriale.

**Esercizi proposti**

- 1) Si considerino i due sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ :

$$V = \{(x, y, z): x = y\},$$

$$W = \{(x, y, z): y = z\}.$$

Si descriva il sottospazio intersezione

$$Z = V \cap W.$$

Si descriva il sottospazio somma  $V+W$ .

- 2) Esiste un sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  che non contiene nessuno dei seguenti vettori:  $v=(1,0)$  e  $w(0,1)$ ?
- 3) Si stabilisca per quali valori di  $a$  reale i vettori  $(5,5)$  e  $(2,a)$  sono linearmente dipendenti.
- 4) Si trovi la dimensione del sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$   
$$V = \mathcal{L}((1,1,1), (2,0,0), (3,1,1)).$$
- 5) Si trovi una base di  $\mathbb{R}^2$  che non contiene nessuno dei seguenti vettori:  $v=(1,0)$  e  $w(0,1)$ .
- 6) Si trovino le componenti del vettore  $v=(5,2)$  rispetto alla base trovata nell'esercizio 5.
- 7) Si provi che i vettori  $(1,5,5)$  e  $(2,2,-1)$  non formano una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- 8) Si provi che i vettori  $(1,5,5)$ ,  $(2,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(2,2,-1)$  non formano una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- 9) I vettori  $v=(1,1,0)$  e  $w=(0,4,-1)$  formano una base del sottospazio vettoriale  $V$  di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $x-y=4z$ ?
- 10) Si trovino due sottospazi distinti  $V$  e  $W$  di  $\mathbb{R}^3$  contenenti entrambi i due vettori  $v=(1,1,1)$  e  $w=(0,0,3)$ .
- 11) Si stabilisca per quali valori reali di  $h$  i vettori  $\mathbf{v}=\mathbf{i}-h\mathbf{j}$  e  $\mathbf{w}=2\mathbf{i}-h\mathbf{j}$  sono linearmente indipendenti.

### III lezione marzo 2019

Unicità della scrittura di un vettore mediante gli elementi di una base. Insieme libero. Proprietà sulla dimensione di un sottospazio. Determinazione di una base a partire da un insieme di generatori. (Metodo degli scarti). Determinazione di una base a partire da un insieme di vettori linearmente indipendenti. (Metodo del completamento). Matrici e notazioni. Somma tra matrici. Moltiplicazione di un numero per una matrice. Insieme delle matrici come spazio vettoriale sui reali. Matrice nulla. Matrice opposta. Matrice ridotta per righe. Trasformazioni elementari per la riduzione di una matrice. Rango o caratteristica di una matrice. Spazio delle righe e spazio delle colonne di una matrice. Teorema sulla dimensione dello spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una matrice. Rango di una matrice ridotta.

Dimensione di un sottospazio utilizzando una matrice associata ai generatori del sottospazio.

Formula di Grassmann. Esercitazioni sul calcolo del rango, sulle dimensioni di sottospazi, sull'intersezione e sulla somma, sul calcolo di una base di un sottospazio.

Esercizi.

- 1) Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ :  $U=\langle(1,3)\rangle$  e  $V=\langle(0,1)\rangle$ , calcolare la dimensione di  $U$  ed una sua base, la dimensione di  $V$  ed una sua base, la dimensione del sottospazio intersezione ed una sua base se è definita, la dimensione del sottospazio somma ed una sua base.
- 2) Calcolare il rango della matrice  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$A$  è una matrice ridotta per righe?

Con trasformazioni elementari trasforma  $A$  in una matrice equivalente ridotta per righe, detta  $B$  tale matrice. Quante sono le righe non nulle di  $B$ ? Calcolare il rango di  $B$ .

- 3) Si trovi una base di  $\mathbb{R}^3$  contenente il vettore  $v=(1,1,5)$ .
- 4) Si trovi una base del seguente sottospazio

$$V = \{(x, y, z): x + y = 0 = y - z\}$$

di  $\mathbb{R}^3$ .

- 5) Si trovi la dimensione ed una base del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ :

$$V=\langle(1,1,1,1), (2,0,7,8), (1,-1,6,7)\rangle.$$

- 6) Si trovi una base di  $\mathbb{R}^2$  che non contenga i vettori della base canonica.

#### IV lezione marzo 2019

Prodotto tra matrici. Matrice identica. Matrice invertibile. Matrice inversa. Unicità della matrice inversa (con dimostrazione). Trasposta di una matrice. Matrice diagonale. Matrici simmetriche. Matrici antisimmetriche. Proprietà del prodotto. Matrice inversa della matrice prodotto. Matrice quadrata somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica. Sottospazi di matrici.

#### Esercizi

- 1) Calcolare i prodotti tra matrici  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

- 2) Trovare due matrici di ordine tre non nulle il cui prodotto è la matrice nulla.  
3) Calcolare la trasposta di A, la trasposta di B, la trasposta di A+B e la trasposta di A · B.  
4) Calcolare il sottospazio T delle matrici antisimmetriche di ordine 2 nello spazio vettoriale sui reali delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Determinare la dimensione di T ed una sua base.  
Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di ordine 2 nello spazio vettoriale sui reali delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Determinare la dimensione di S+T ed una sua base.  
Determinare la dimensione di S∩T ed una sua base se è definita.  
5) Calcolare la dimensione ed una base del sottospazio delle matrici diagonali di ordine 3.  
6) Stabilire se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  è invertibile. Determinare la matrice inversa di  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

#### V lezione marzo 2019

Sistemi lineari. Soluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouchè-Capelli (I e II parte), sulla risolubilità di un sistema lineare e sul numero di soluzioni di un sistema lineare. Sistemi lineari equivalenti. Sistema lineare ridotto. Risoluzione di un sistema lineare ridotto. Risoluzione di un sistema con il metodo di riduzione. Discussione di un sistema lineare parametrico con il metodo di riduzione.

#### Esercizi proposti.

- 1) Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ \frac{2}{5}x - y = 3 \end{cases}; b) \begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}; c) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases};$$

3) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$d) \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}; e) \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}; f) \begin{cases} x - y + 2z + w = 0 \\ x + y - z + 2w = 0 \end{cases}.$$

4) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$g) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{cases}; h) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -3x - y - 7z = 4 \\ 5x + 2y + 9z = -10 \\ x + \frac{1}{2}y + z = -3 \end{cases}; i) \begin{cases} x - y - z + 2w = 5 \\ 2x - y - z + w = -4 \\ -x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - w = -\frac{1}{3} \\ 5x - 3y - 3z + 4w = -3 \end{cases}.$$

5) Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari seguenti, determinare, se possibile, i valori del parametro reale k per cui esso è compatibile:

$$1) \begin{cases} x = 3 \\ 3x - 5y = 4 \\ x + y + z = k \end{cases}; 2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 + k \\ 4x + 5y + 6z = k \\ 7x + 8y + 9z = k + 1 \end{cases}; 3) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \\ 8x + 3y = k^2 \end{cases}.$$

6) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$i) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \\ 5x + 9y = 6 \end{cases}; ii) \begin{cases} x + 2y - z + 5w = 7 \\ 2x - 4y - z - 2w = -1 \\ 5x - 6y - 3z + w = 0 \end{cases}; iii) \begin{cases} x + 2y - 8z + w + 3t = 0 \\ 2x - 7y - 3z - 2w + 2t = 0 \\ -3x + 27y - 15z + 9w + 3t = 0 \\ 3x - 16y + 2z - 5w + t = 0 \end{cases}.$$

## VI lezione marzo 2019

Equazioni matriciali. Calcolo dell'inversa di una matrice utilizzando un'equazione matriciale. Teorema di Rouchè-Capelli per le equazioni matriciali. Determinante di una matrice di ordine 1, 2 e 3. Teorema di

Laplace. Regola di Sarrus. Proprietà dei determinanti. Complemento algebrico di un elemento. Matrice aggiunta. Inversa di una matrice tramite la matrice aggiunta. Criterio di invertibilità di una matrice. Utilizzo del determinante per calcolare la lineare indipendenza di n vettori in spazio vettoriale di dimensione n.

- 1) Stabilire se la seguente matrice è invertibile  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  e calcolare la sua inversa  $A^{-1}$  utilizzando le equazioni matriciali ed il metodo della matrice aggiunta. Verificare che il prodotto di A per la sua inversa è uguale alla matrice identica.
- 2) Calcolare i seguenti determinanti
 
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$
- 3) Calcolare l'inversa della matrice  $A^{-1}$  dell'esercizio (1)
- 4) Calcolare per quali valori del parametro reale k la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  è invertibile e calcolare l'inversa di A per k=3.
- 5) Stabilire se i vettori (1,2,3) (0,4,0) e (1,1,5) sono linearmente indipendenti.

#### VII lezione **marzo 2019**

Matrici triangolari alte e basse. Proprietà dei determinanti. Teorema di Binet. Determinante della trasposta. Determinante di una matrice triangolare. Matrici ortogonali. Determinante di una matrice ortogonale (con dimostrazione). Regola di Cramer. Studio di sistemi lineari parametrici. Teorema di Kronecher.

#### Esercizi

- 1) Stabilire quali delle seguenti matrici sono triangolari, quali simmetriche, quali antisimmetriche, quali diagonali, quali ortogonali e calcolare il determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 2) Calcolare il determinante dei seguenti matrici prodotto:  $A \cdot C, A \cdot D, C \cdot D, e A \cdot C \cdot D, E \cdot F, B \cdot F.$

- 3) Studiare il seguente sistema lineare  $A \cdot X = B$  con la regola di Cramer:

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5) Studiare i seguenti sistemi lineari al variare del parametro reale k:

(a)

$$\begin{cases} x + ky + 3z + (k-1)t = 0 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 0 \\ 4x + 3y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (k-3)x - y + 5z = 1 \\ (3-k)y + 6z = 3 \\ (k-3)z = 3-k \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (k+5)x = -k-5 \\ x + 2y = -3 \\ 7x - y + (k+5)z = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + ky + z = 1 \\ 4x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

VIII lezione

Applicazioni al teorema di Kronecher. Calcolo del rango. Determinante di una matrice di ordine 4.  
Applicazioni lineari. Esempi. Proprietà delle applicazioni lineari.

Esercizi

1) Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 0 & 00 & -1 \\ 2 & 22 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro reale k:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ k & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ k-2 & 2 & k-1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 3 & k-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0030 \\ 6128 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1100 \\ 0291 \\ 0030 \\ 0028 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1101 \\ 0291 \\ 2030 \\ 3008 \end{pmatrix}$$

4) Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari motivando la risposta:

a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 3y, x)$

b)  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 3y, x^2)$

c)  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 3y + 2, 0)$ .