Lezione 3
Probabilità Condizionata, Totale e Bayesiana
Accenni Teorici ed Esercizi

Prof. Massimiliano Ferrara

Accenni Teorici

La *probabilità condizionata* di un evento A dato l'evento B, indicata con $P(A \mid B)$ è definita come

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{con} \quad P(B) > 0.$$

Analogamente

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{con} \quad P(A) > 0.$$

La formula di *Bayes* è la seguente

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)},$$

che enfatizza l'importanza dell'aggiornamento delle nostre credenze, rispetto alla probabilità a priori $P(A)$, all'arrivo di nuove informazioni.
La *Probabilità totale* concerne eventi $A_1, A_2, \ldots A_n$ mutuamente esclusivi, cioè

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \quad \text{con} \quad A_j \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j.$$

La probabilità totale vale allora

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

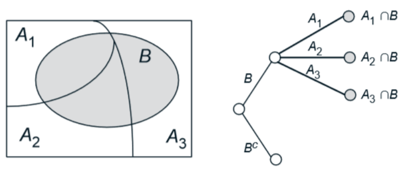
da cui

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)}.$$

Si noti che al numeratore si usa l'uguaglianza

$$P(A_i)P(B \mid A_i) = P(A_i \mid B)P(B) \equiv P(A_i \cap B),$$

mentre al denominatore si sfrutta il teorema della probabilità totale $P(B)$. In particolare



Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formano una partizione dello spazio campionario. L'evento B (in grigio) può essere decomposto in una unione di intersezioni $A_i \cap B$ disgiunte

$$B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

che ricopre tutto l'insieme B (la parte grigia). Usando l'assioma di additività, si ottiene

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_i \cap B).$$

Dalla definizione di probabilità condizionata, si ha

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i)$$

da cui

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n).$$

Con la probabilità condizionata ci sono un numero di cause che risultano in un certo effetto. Applicando la formula di Bayes, si osserva l'effetto e si vuole inferire a quale sia la causa.

Esempio siano

- $A = \{\text{un aereo è presente}\}$,
- $B = \{\text{il radar registra la presenza}\}$,

Si ha che

$$P(A) = 0.05; \quad P(B \mid A) = 0.99; \quad P(B \mid A^c) = 0.1.$$

Applicando il teorema di Bayes

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A^c)P(B \mid A^c)} \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.99}{0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.1} \\ &\approx 0.3426 \end{aligned}$$

1 Esercizi

E1 Si calcoli $P(A \mid B)$ se

a) $A \cap B = \emptyset$

b) $A \subset B$

c) $B \subset A$

E2 Due impianti di produzione producono pezzi simili. L'impianto 1 produce 1.000 pezzi, 100 dei quali sono difettosi. L'impianto 2 produce 2.000 pezzi, 150 dei quali sono difettosi. Una parte selezionata casualmente viene trovata difettosa. Qual è la probabilità che provenga dall'impianto 1?
Suggerimento: Per iniziare definire i due eventi A e B per trovare $A \cap B$.

E3 Si supponga che un test di laboratorio per individuare una certa malattia dia i seguenti risultati. Sia

- $A =$ evento in cui la persona sottoposta al test ha la malattia;

- $B =$ evento in cui il risultato del test è positivo.

Si sa che

$$P(B \mid A) = 0.99 \qquad P(B \mid A^c) = 0.005$$

e lo 0.1 per cento della popolazione ha effettivamente contratto la malattia. Qual è la probabilità che una persona abbia la malattia dato che il risultato del test è positivo?
Suggerimento: $P(A) = 0.001$.