Lezione 1: Probabilità e Teoria degli Insiemi

Università Mediterranea di Reggio Calabria
Decisions Lab

Gli insiemi

Gli Insiemi

Un insieme S è una collezione di oggetti chiamati elementi dell'insieme.

- Se x è un elemento di S, allora $x \in S$;
- Se invece x non lo è, allora $x \notin S$;
- Se S non ha elementi, allora $S = \emptyset$.

Gli Insiemi

- Se S contiene un numero finito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

  Come un lancio di una moneta non truccata $S = \{T, C\}$ T testa e C croce.

- Se invece S contiene un numero infinito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \dots\}$$

  ed è numerabile se gli elementi sono in relazione biunivoca con i numeri naturali.

- Si può considerare un insieme S i cui elementi x sono caratterizzati da una certa proprietà P

$$\{x \mid x \text{ che soddisfa } P\}$$

  dove | significa tale che.

- Se S contiene un numero finito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Come un lancio di una moneta non truccata
$S = \{T, C\}$ T testa e C croce.

- Se invece S contiene un numero infinito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

ed è numerabile se gli elementi sono in relazione biunivoca con i numeri naturali.

- Si può considerare un insieme S i cui elementi x sono caratterizzati da una certa proprietà P

$$\{x \mid x \text{ che soddisfa } P\}$$

dove | significa tale che.

- Se S contiene un numero finito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Come un lancio di una moneta non truccata
$S = \{T, C\}$ T testa e C croce.

- Se invece S contiene un numero infinito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

ed è numerabile se gli elementi sono in relazione biunivoca con i numeri naturali.

- Si può considerare un insieme S i cui elementi x sono caratterizzati da una certa proprietà P

$$\{x \mid x \ \text{ che soddisfa } \ P\}$$

dove | significa tale che.

Se S è l'insieme di tutti gli scalari $x \in [0, 1]$, può essere scritto

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

Si noti che è un intervallo continuo, è non numerabile: gli elementi di S non hanno corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

- Se ogni $x \in S$ e contenuto in T, allora S è sottoinsieme di T ed è scritto $S \subset T$.
- Se $S \subset T$ e $T \subset S$ allora $S = T$.
- Definiamo Ω come l'insieme universale, cioè contenente tutti gli elementi che possono essere di interesse in uno specifico contesto. Considereremo soltanto gli insiemi S tali che $S \subset \Omega$.

Se S è l'insieme di tutti gli scalari $x \in [0, 1]$, può essere scritto

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

Si noti che è un intervallo continuo, è non numerabile: gli elementi di S non hanno corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

- Se ogni $x \in S$ e contenuto in T, allora S è sottoinsieme di T ed è scritto $S \subset T$.
- Se $S \subset T$ e $T \subset S$ allora $S = T$.
- Definiamo Ω come l'insieme universale, cioè contenente tutti gli elementi che possono essere di interesse in uno specifico contesto. Considereremo soltanto gli insiemi S tali che $S \subset \Omega$.

Se S è l'insieme di tutti gli scalari $x \in [0, 1]$, può essere scritto

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

Si noti che è un intervallo continuo, è non numerabile: gli elementi di S non hanno corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

- Se ogni $x \in S$ e contenuto in T, allora S è sottoinsieme di T ed è scritto $S \subset T$.
- Se $S \subset T$ e $T \subset S$ allora $S = T$.
- Definiamo Ω come l'insieme universale, cioè contenente tutti gli elementi che possono essere di interesse in uno specifico contesto. Considereremo soltanto gli insiemi S tali che $S \subset \Omega$.

Gli Insiemi

Se S è l'insieme di tutti gli scalari $x \in [0, 1]$, può essere scritto

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

Si noti che è un intervallo continuo, è non numerabile: gli elementi di S non hanno corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

- Se ogni $x \in S$ e contenuto in T, allora S è sottoinsieme di T ed è scritto $S \subset T$.
- Se $S \subset T$ e $T \subset S$ allora $S = T$.
- Definiamo Ω come l'insieme universale, cioè contenente tutti gli elementi che possono essere di interesse in uno specifico contesto. Considereremo soltanto gli insiemi S tali che $S \subset \Omega$.

- Il complemento di S rispetto a Ω è l'insieme

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$$

  ed è denotato come S^c. Il complemento di Ω è $\Omega^c = \emptyset$.
- L'unione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **o** T e si indica con $S \cup T$
- L'intersezione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **e** T e si indica con $S \cap T$
- Due insiemi sono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- Una collezione di insiemi si dice partizione di S, se gli insiemi della collezione sono disgiunti e la loro unione è S.

Operazioni sugli insiemi

- Il complemento di S rispetto a Ω è l'insieme

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$$

  ed è denotato come S^c. Il complemento di Ω è $\Omega^c = \emptyset$.
- L'unione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **o** T e si indica con $S \cup T$
- L'intersezione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **e** T e si indica con $S \cap T$
- Due insiemi sono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- Una collezione di insiemi si dice partizione di S, se gli insiemi della collezione sono disgiunti e la loro unione è S.

Operazioni sugli insiemi

- Il complemento di S rispetto a Ω è l'insieme

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$$

  ed è denotato come S^c. Il complemento di Ω è $\Omega^c = \emptyset$.
- L'unione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **o** T e si indica con $S \cup T$
- L'intersezione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **e** T e si indica con $S \cap T$
- Due insiemi sono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- Una collezione di insiemi si dice partizione di S, se gli insiemi della collezione sono disgiunti e la loro unione è S.

Operazioni sugli insiemi

- Il complemento di S rispetto a Ω è l'insieme

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$$

  ed è denotato come S^c. Il complemento di Ω è $\Omega^c = \emptyset$.
- L'unione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **o** T e si indica con $S \cup T$
- L'intersezione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **e** T e si indica con $S \cap T$
- Due insiemi sono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- Una collezione di insiemi si dice partizione di S, se gli insiemi della collezione sono disgiunti e la loro unione è S.

Operazioni sugli insiemi

- Il complemento di S rispetto a Ω è l'insieme

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$$

  ed è denotato come S^c. Il complemento di Ω è $\Omega^c = \emptyset$.
- L'unione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **o** T e si indica con $S \cup T$
- L'intersezione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **e** T e si indica con $S \cap T$
- Due insiemi sono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- Una collezione di insiemi si dice partizione di S, se gli insiemi della collezione sono disgiunti e la loro unione è S.

Diagrammi di Venn

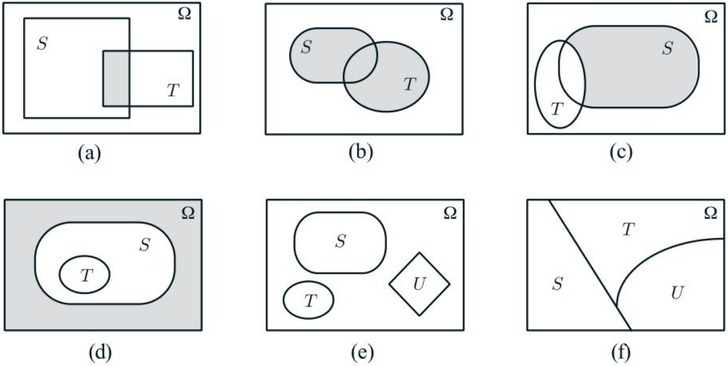


Figure 1.1: Examples of Venn diagrams. (a) The shaded region is $S \cap T$. (b) The shaded region is $S \cup T$. (c) The shaded region is $S \cap T^c$. (d) Here, $T \subset S$. The shaded region is the complement of S. (e) The sets S, T, and U are disjoint. (f) The sets S, T, and U form a partition of the set Ω.

Algebra degli Insiemi

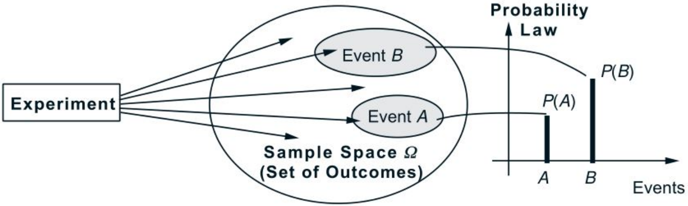
Di conseguenza, le operazioni sugli insiemi hanno delle proprietà

$$
\begin{aligned}
S \cup T &= T \cup S, & S \cup (T \cup U) &= (S \cup T) \cup U, \\
S \cap (T \cup U) &= (S \cap T) \cup (S \cap U), & S \cup (T \cap U) &= (S \cup T) \cap (S \cup U), \\
(S^c)^c &= S, & S \cap S^c &= \emptyset, \\
S \cup \Omega &= \Omega, & S \cap \Omega &= S.
\end{aligned}
$$

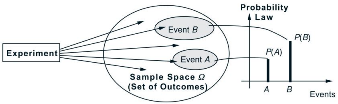
Due particolari proprietà sono le *leggi di De Morgan*

$$
\left(\bigcup_n S_n \right)^c = \bigcap_n S_n^c, \qquad \left(\bigcap_n S_n \right)^c = \bigcup_n S_n^c.
$$

La Probabilità


Experiment
Event B
Event A
Sample Space Ω
(Set of Outcomes)
Probability
Law
P(B)
P(A)
A
B
Events

Modelli Probabilistici

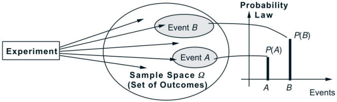


Un modello probabilistico è una descrizione matematica di una situazione incerta.

I due ingredienti principali sono:

- Lo **spazio campionario** Ω che è l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento;
- la **legge di probabilità** che assegna ad un insieme A di possibili risultati (chiamati **eventi**), un numero non negativo $P(A)$ (la **probabilità** di A).

Modelli Probabilistici



Un modello probabilistico è una descrizione matematica di una situazione incerta.
I due ingredienti principali sono:

- Lo **spazio campionario** Ω che è l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento;
- la **legge di probabilità** che assegna ad un insieme A di possibili risultati (chiamati **eventi**), un numero non negativo $\mathrm{P}(A)$ (la **probabilità** di A).

Insiemi
Operazioni sugli insiemi
La Probabilità

In particolare:

- Si definisca **esperimento aleatorio**, un processo le cui possibili realizzazioni sono due o più risultati di cui non si può prevedere con certezza quale si realizzerà;
- un **evento** si verifica quando il risultato dell'esperimento aleatorio è uno degli eventi che lo costituiscono.

Insiemi
Operazioni sugli insiemi
La Probabilità

In particolare:

- Si definisca **esperimento aleatorio**, un processo le cui possibili realizzazioni sono due o più risultati di cui non si può prevedere con certezza quale si realizzerà;
- un **evento** si verifica quando il risultato dell'esperimento aleatorio è uno degli eventi che lo costituiscono.

Scegliere lo spazio campionario corretto

- Due elementi dello stesso spazio campionario devono essere distinti e **mutualmente esclusivi**: l'esperimento dà un solo risultato.
- L'insieme campionario scelto per un modello probabilistico deve essere **collettivamente esaustivo**: qualsiasi cosa accada nell'esperimento, si otterrà sempre un risultato incluso in Ω.

L'**intersezione** $S \cap T$ si ha quando si verificheranno sia S che T, cioè è la **probabilità congiunta** di S e T.

- **mutualmente esclusivi**: $S \cap T = \emptyset$ (evento impossibile)
- **collettivamente esaustivi**: $S_1 \cup S_2 \cup \cdots S_n = \Omega$

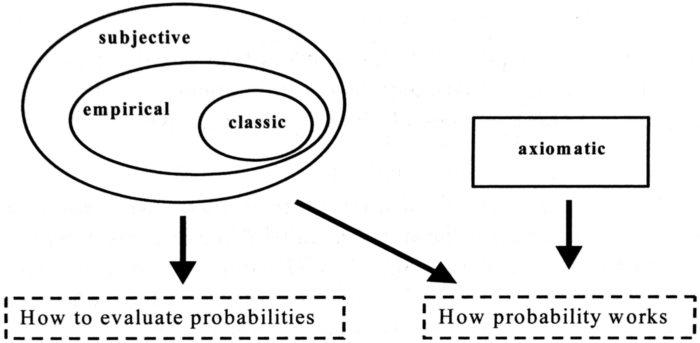
Insiemi
Operazioni sugli insiemi
La Probabilità

L'**intersezione** $S \cap T$ si ha quando si verificheranno sia S che T, cioè è la **probabilità congiunta** di S e T.

- **mutualmente esclusivi**: $S \cap T = \emptyset$ (evento impossibile)
- **collettivamente esaustivi**: $S_1 \cup S_2 \cup \cdots S_n = \Omega$

L'**intersezione** $S \cap T$ si ha quando si verificheranno sia S che T, cioè è la **probabilità congiunta** di S e T.

- **mutualmente esclusivi**: $S \cap T = \emptyset$ (evento impossibile)
- **collettivamente esaustivi**: $S_1 \cup S_2 \cup \cdots S_n = \Omega$


subjective
empirical
classic
axiomatic
How to evaluate probabilities
How probability works

Classica

Per un esperimento aleatorio con n risultati ugualmente probabili, un evento con k risultati su n ha probabilità

$$\frac{k}{n}$$

Es. In un lancio di una moneta non truccata, i risultati possono essere testa T o croce C. Il numero dei possibili risultati è $n = 2$. Per l'evento T, si ha $k = 1$ cioè

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Che esca uno fra testa e croce

$$\frac{k}{n} = \frac{2}{2} = 1$$

cioè certezza.

Classica

Per un esperimento aleatorio con n risultati ugualmente probabili, un evento con k risultati su n ha probabilità

$$\frac{k}{n}$$

Es. In un lancio di una moneta non truccata, i risultati possono essere testa T o croce C. Il numero dei possibili risultati è $n = 2$. Per l'evento T, si ha $k = 1$ cioè

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Che esca uno fra testa e croce

$$\frac{k}{n} = \frac{2}{2} = 1$$

cioè certezza.

Frequentista

La probabilità è il limite della proporzione di volte in cui l'evento A si verifica in un numero molto elevato n di ripetizioni di un esperimento aleatorio

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

dove $n(A)$ è il numero di successi nei primi n esperimenti ed $n(A)/n$ la frequenza relativa dell'evento A.

Soggettiva

La probabilità esprime il livello individuale di fiducia del verificarsi di un certo evento. Quindi, decision-makers con una differente informazione e/o gusti, possono valutare l'accadimento di un evento con differenti probabilità

La Probabilità di un evento A va vista come il grado di fiducia che ciascuno attribuisce, sulla base dello stato della informazione, al verificarsi dell'evento.

Soggettiva

La probabilità esprime il livello individuale di fiducia del verificarsi di un certo evento. Quindi, decision-makers con una differente informazione e/o gusti, possono valutare l'accadimento di un evento con differenti probabilità

La Probabilità di un evento A va vista come il grado di fiducia che ciascuno attribuisce, sulla base dello stato della informazione, al verificarsi dell'evento.

Soggettiva

Come si fa valutare ad un soggetto la sua probabilità soggettiva dell'evento A?
Basta proporgli una scommessa: Vincerà S euro se l'evento si verificherà, nulla altrimenti.
Quale prezzo p_A si ritiene equo pagare per tale scommessa?

$$P(A) = \frac{p_A}{S}$$

Soggettiva

Come si fa valutare ad un soggetto la sua probabilità soggettiva dell'evento A?
Basta proporgli una scommessa: Vincerà S euro se l'evento si verificherà, nulla altrimenti.
Quale prezzo p_A si ritiene equo pagare per tale scommessa?

$$P(A) = \frac{p_A}{S}$$

Soggettiva

Come si fa valutare ad un soggetto la sua probabilità soggettiva dell'evento A?
Basta proporgli una scommessa: Vincerà S euro se l'evento si verificherà, nulla altrimenti.
Quale prezzo p_A si ritiene equo pagare per tale scommessa?

$$P(A) = \frac{p_A}{S}$$

Soggettiva

Problema: p_A può non riflettere verità.
Soluzione: Il decision-maker dichiara il prezzo equo **prima** che lui sappia di essere lo scommettitore o il banco.

Principio di coerenza

Chi valuta la probabilità non lo farà mai in modo da essere costretto ad accettare un sistema di scommesse in cui sia posto sicuramente in perdita.

Soggettiva

Problema: p_A può non riflettere verità.
Soluzione: Il decision-maker dichiara il prezzo equo **prima** che lui sappia di essere lo scommettitore o il banco.

Principio di coerenza

Chi valuta la probabilità non lo farà mai in modo da essere costretto ad accettare un sistema di scommesse in cui sia posto sicuramente in perdita.

Assiomatica

L'approccio assiomatico di Kolmogorov, può essere visto come una codificazione delle regole computazionali che sono *indipendenti* dal significato preciso che si attribuisce alla probabilità

Assiomi

Sia Ω uno spazio campionario finito e A un suo evento. La probabilità dell'evento A è così un numero reale che segue tre assiomi:

- *Assioma 1*: $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$;
- *Assioma 2*: $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ (normalizzazione);
- *Assioma 3*: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.

Leggi

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(A) \leqslant P(B)$ se $A \subset B$;
4. $P(A) \leqslant 1$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
6. Se gli eventi sono tutti disgiunti $\Omega(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$, allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$