

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 07/07/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un punto materiale P, di massa $2m$, vincolato a muoversi con attrito sull’asse verticale Oy e da un disco omogeneo di massa m e raggio R , vincolato a rotolare senza strisciare lungo l’asse orizzontale Ox.

Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con il baricentro C del disco, mentre un’altra molla di costante elastica $h > 0$ collega il punto P ad un punto fisso situato sul semiasse verticale positivo Oy a distanza $3R$ da O. Sul disco agisce un momento $\mathbf{M} = k(\mathbf{OH} \times \mathbf{CT})$, con H punto di contatto tra disco e guida, e T punto prefissato appartenente al bordo del disco.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
 - ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando il punto si trova sul semiasse verticale positivo a distanza R da O con velocità $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{j}$, con $u_0 < 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy, mentre il disco è posto sul semiasse orizzontale positivo Ox con il baricentro C a distanza $\pi R/2$ dall’asse verticale Oy avente velocità $\mathbf{v}_C = w_0 \mathbf{i}$, con $w_0 > 0$ e \mathbf{i} il versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- Posto, quindi, $mg = hR = kR$, determinare:
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
 - iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Data una sbarra omogenea di lunghezza L vincolata nel piano Oxy a scorrere con un estremo sull’asse Ox, dire quanti assi centrali d’inerzia sono assi principali rispetto all’origine O degli assi:
i) zero; ii) **uno**; iii) due; iv) tre.

2. Data una biglia vincolata a rotolare senza strisciare nel piano verticale all’interno di una guida circolare, dire quanti gradi di libertà possiede:
i) due ii) tre iii) **quattro** iv) cinque

3. Data un’asta omogenea vincolata con il baricentro G a traslare senza ruotare lungo la bisettrice del 1° e 3° quadrante del piano Oxy, individuare la, o le, equazioni pure del moto:
i) la 1^a ECD proiettata nel piano; ii) **la 1^a ECD proiettata lungo la bisettrice**; iii) la 2^a ECD con polo in G proiettata lungo la normale al piano; iv) la 2^a legge di Newton proiettata nel piano.

4. Indicare la formula ottimale per il calcolo del momento angolare di una lamina quadrata vincolata a muoversi con un suo vertice fisso A:
i) il 2° teorema di Koenig; ii) $AG \times m\mathbf{v}_G$; iii) **$\sigma_A \omega$** ; iv) $AG \times M\mathbf{v}_G + \sigma_G \omega$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà: l’ordinata del punto y_P e l’angolo θ , preso in verso orario che, per scelta, il raggio OT del disco forma con il raggio OH, con H punto di contatto tra disco e asse Ox, supponendo che $R\theta(t=t_0)=0$.

Un’equazione pura si ottiene dalla 2^a legge di Newton per il punto P proiettata sull’asse Oy:

$$2m \, d^2y_P/dt^2 = -2mg - h(y_P-3R) + k(R - y_P) + A, \text{ con } A = -f_d |kR\theta| \text{ (segn } v_P)$$

L’altra equazione pura si ottiene dalla 2^a ECD per il disco proiettata sull’asse Hz:

$$-3/2 \, mR^2 \, d^2\theta/dt^2 = kR^2\theta(1-\cos\theta)$$

ii) Le reazioni vincolari all’istante iniziale sono date da:

$$\phi_{P1}(0) = -kR\pi/2, \quad \phi_{P3}(0) = 0, \quad A_P(0) = f_d \, kR\pi/2$$

$$\phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0, \quad \phi_{H1}(0) = kR\pi/6, \quad \phi_{H2}(0) = mg; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per il disco sono due per θ , e la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce le corrispondenti per y_P :

$$\theta_1 = 0, \quad y_{P1} = R; \quad \text{-----} \quad \theta_2 = 2\pi, \quad -f_s \, \pi R + R \leq y_{P1} \leq f_s \, \pi R + R;$$

iv) Scegliendo la prima posizione d’equilibrio $\theta_1 = 0$ e $y_{P1} = R$, si ottengono le seguenti reazioni vincolari all’equilibrio:

$$\phi_{P1}(0) = 0, \quad \phi_{P3}(0) = 0, \quad A_P(0) = 0$$

$$\phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0, \quad \phi_{H1}(0) = 0, \quad \phi_{H2}(0) = mg, \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 22/07/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manuale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta omogenea AB, di massa m e lunghezza 2L, vincolata a muoversi con il baricentro G sull’asse orizzontale Ox.

Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica $h > 0$ collegante l’origine degli assi con l’estremo A dell’asta;

II) una molla di costante elastica $k > 0$ collegante l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sul semiasse orizzontale positivo Ox a distanza 4L da O;

III) un momento $\mathbf{M} = (23 h)/3$ ($\mathbf{B}'\mathbf{B} \times \mathbf{GB}'$), con \mathbf{B}' proiezione dell’estremo B sull’asse orizzontale Ox.

Supponendo il piano ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse orizzontale Ox con il baricentro in quiete nell’origine degli assi e l’estremo B sul semiasse positivo con velocità $\mathbf{v}_B = u_0 \mathbf{j}$, essendo $u_0 > 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy; **(4 punti)**

Posto, quindi, $h = k = m\omega^2$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(7 punti)**

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Data una lamina vincolata a ruotare intorno ad un suo lato fisso OA in un sistema relativo Oxyz soggetto a traslare uniformemente lungo la direzione Oy, dire se il sistema di forze di trascinamento è riducibile a:

i) **zero** ii) un vettore applicato iii) una coppia iv) un vettore e una coppia

2. Dato un cilindro vincolato col suo asse a scorrere e ruotare lungo un’asse r, dire quante componenti hanno le relative reazioni vincolari:

i) due ii) tre iii) **quattro** iv) cinque

3. Dato un corpo rigido, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite (O' = origine solidale):

i) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$ ii) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$ iii) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$ iv) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un punto P di massa m vincolato a ruotare lungo una circonferenza di centro C nel piano verticale la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è data da:

i) il 3° teorema di Koenig ii) $\frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2$ iii) $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_C$ iv) $\frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono dati dall’ascissa x_G del baricentro e dall’angolo θ che l’asta forma con l’asse Ox , considerato in verso antiorario. Un’equazione pura è data dalla 1^a equazione cardinale della dinamica proiettata sull’asse Ox

$$m \, dx_G^2 / dt^2 = -h(x_G - L \cos \theta) - k(x_G + L \cos \theta - 4L) + m\omega^2 x_G,$$

mentre l’altra equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse Gz :

$$1/3 \, mL^2 \, d^2\theta / dt^2 = -hLx_G \sin \theta + kL \sin \theta (x_G + 4L) - 1/3 \, m\omega^2 L^2 \sin \theta \cos \theta - 23/3 \, hL^2 \sin \theta \cos \theta .$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\Psi(0) = 0, \phi_{G2}(0) = mg, \phi_{G3}(0) = 0$$

(se il vincolo di rotazione è realizzato con una reazione puntuale in B , $\phi_{B3}(0) = 0$)

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce una posizione di equilibrio per x_G , e quattro posizioni di equilibrio per θ :

$$\begin{array}{ll} x_G = 4L, \theta_1 = 0, & \rightarrow H > 0 \text{ stabile} \\ x_G = 4L, \theta_3 = 2\pi/3, & \rightarrow H < 0 \text{ instabile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_G = 4L, \theta_2 = \pi, & \rightarrow H > 0 \text{ stabile} \\ x_G = 4L, \theta_4 = 4\pi/3, & \rightarrow H < 0 \text{ instabile} \end{array}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione $x_G = 4L, \theta_3 = 0$, si ha:

$$\Psi = 0, \phi_{G2} = mg, \phi_{G3} = 0$$

(se il vincolo di rotazione è realizzato con la reazione puntuale in B , $\phi_{B3}(0) = 0$).

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 03/09/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Nel piano verticale Oxy un punto materiale P di massa $2m$ è vincolato a muoversi lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante, mentre un altro punto materiale Q di massa m è vincolato a muoversi lungo la parabola di equazione $y = -\alpha x^2$, con $\alpha > 0$.

I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica $h > 0$, mentre una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P ad un punto fisso H situato sul semiasse verticale positivo a distanza R da O; inoltre sul punto Q agisce una forza $\mathbf{F}_Q = 2 h \alpha^2 x^3 \mathbf{i}$, con \mathbf{i} versore dell’asse Ox ed x ascissa del punto P.

Supponendo che il piano Oxy ruoti uniformemente intorno all’asse Oy, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari all’istante iniziale, quando il punto P si trova nel primo quadrante a distanza R da O con velocità di modulo $u_0 > 0$ nel verso di crescita della bisettrice, mentre il punto Q è in quiete nell’origine degli assi. **(4 punti)**

Supponendo, invece, il piano Oxy fisso e le costanti così fissate: $h = k$, $2mg = kR$ ed $\alpha = R^{-1}$, determinare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio stabile del sistema. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. In un piano Ors che ruota uniformemente attorno all’asse r, un’asta omogenea è vincolata a traslare perpendicolarmente col suo punto medio M sull’asse Or stessa, dire se il sistema di forze assifughe agenti su di essa è riducibile a:

- i) zero
- ii) un vettore applicato
- iii) una coppia
- iv) un vettore e una coppia

2. Dato un arco di circonferenza omogeneo di apertura angolare α , dire quanti assi centrali si conoscono a priori:

- i) zero
- ii) uno
- iii) due
- iv) tre

3. Dato un sistema materiale formato da due aste omogenee di lunghezza L fra loro incernierate, con il vertice di una saldato in un punto P, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema materiale:

- i) due
- ii) quattro
- iii) sei
- iv) otto

4. Dato un disco omogeneo vincolato a rotolare senza strisciare su una retta Ox mantenendosi in un piano verticale Oxy, individuare la o le equazioni pure del moto (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica, H = punto di contatto disco-piano):

- i) la 1^a ECD proiettata sul piano verticale
- ii) la 1^a ECD
- iii) il teorema del momento angolare assiale di asse Hz;
- iv) la 2^a ECD con polo in H

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 3/3/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse verticale Oy, un sistema materiale è costituito da una sbarra omogenea AB di lunghezza 2R, vincolata con il punto medio C ad un punto del semiasse positivo Oy posto a distanza R dall’origine. Una molla di costante elastica $h > 0$ collega l’estremo B della sbarra ad un punto fisso H posto a distanza R dall’origine sul semiasse positivo Ox. Sulla sbarra, inoltre, agisce un momento $\mathbf{M} = h(\mathbf{OH} \times \mathbf{CB})$.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la sbarra è disposta con l’estremo A nell’origine O e l’estremo B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0 \mathbf{i}$, con $u_0 > 0$ ed \mathbf{i} il versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile a scelta. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un sistema materiale formato da due punti vincolati a muoversi lungo un asse r a distanza d fra di loro, il momento di inerzia rispetto all’asse r è dato da:

- i) un numero reale positivo; ii) un numero reale negativo; iii) zero; iv) un numero complesso

2. Data un’asta rigida vincolata con il proprio baricentro G ad una circonferenza di raggio R e centro C, indicare la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica:

- i) $\frac{1}{2} m v_G^2$; ii) $\frac{1}{2} \sum_i m v_i^2$; iii) $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega})$; iv) il 3° teorema di Koenig.

3. Data una lamina quadrata omogenea vincolata a traslare con un lato lungo l’asse Ox, dire quanti assi centrali sono principali rispetto all’origine O:

- i) zero ; ii) uno; iii) due; iv) tre.

4. Dato un disco vincolato con un punto fisso del suo bordo a muoversi in un piano, indicare la, o le, equazioni pure del moto (EC = equazione cardinale):

- i) la 1^a EC; ii) la 2^a EC; iii) le due EC; iv) la 2^a EC assiale.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA E CFU:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede un grado di libertà, ed il parametro lagrangiano è dato dall’angolo θ tra il piano Cyz ed il piano $C\eta z$, con η asse solidale all’asta. L’equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse Cz :

$$(1/3) mR^2 d^2\theta/dt^2 = - hR^2 \cos\theta - (1/3) mR^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{C1}(0) = - hR, \quad \phi_{C2}(0) = mg + 2hR, \quad \phi_{C3}(0) = (2/3) m\omega u_0, \quad \phi_{B3}(0) = -(2/3) m\omega u_0 \text{ (oppure, se il vincolo è realizzato con un momento, } \Psi_B(0) = -(2/3) m\omega u_0 R, \phi_{C3}(0) = 0)$$

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce quattro posizioni di equilibrio per θ :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = \pi/2, & \rightarrow H > 0, \text{ instabile} \\ \theta_2 = 3\pi/2, & \rightarrow H > 0, \text{ instabile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \theta_3 = \arcsin[-(3h)/(m\omega^2)], & \rightarrow H < 0, \text{ stabile, con } h < m\omega^2/3 \\ \theta_4 = \pi - \theta_3, & \rightarrow H < 0, \text{ stabile, con } h < m\omega^2/3 \end{array}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione $\theta = \theta_3 = \arcsin[-(3h)/(m\omega^2)]$, si ha:

$$\phi_{C1}(\theta_3) = hR \left(\sqrt{1 - \frac{9h^2}{m^2\omega^4}} - 1 \right), \quad \phi_{C2}(\theta_3) = mg + hR \left(1 - \frac{3h}{m\omega^2} \right), \quad \phi_{C3}(\theta_3) = 0, \quad \phi_{B3}(\theta_3) = 0 \text{ (oppure, se il vincolo è realizzato con un momento, } \Psi_B(\theta_3) = 0, \phi_{C3}(\theta_3) = 0)$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 02/07/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascuno quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo una circonferenza di raggio R disposta nel piano verticale Oxy, mentre un altro punto Q di massa 2m è vincolato a muoversi con attrito lungo l’asse Oy. I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Supponendo il piano Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy con velocità angolare costante ω , determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto; **(7 punti)**;
- ii) le reazioni vincolari all’istante iniziale, quando il punto P interseca nel primo quadrante la retta di equazione $y=x$ con velocità $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{t}$, essendo \mathbf{t} il versore tangente alla circonferenza in P ed $u_0 > 0$, mentre il punto Q si trova a quota $-R$ da O con velocità $\mathbf{v}_Q = w_0 \mathbf{j}$, $w_0 < 0$ e \mathbf{j} versore dell’asse Oy. **(4 punti)**
Posto ora $m\omega^2 = k$ ed $f_s = 6mg/(kR) < 1$, calcolare inoltre:
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio a scelta. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Un disco omogeneo è vincolato a rotolare senza strisciare lungo l’asse Ox di un sistema Oxyz traslante uniformemente lungo la direzione Ox. Il sistema di forze apparenti agenti su di esso è riducibile a:

- i) zero ii) un vettore applicato iii) una coppia iv) un vettore e una coppia

2. Data una lamina quadrata omogenea di lato L, dire quanti assi centrali sono principali rispetto ad un punto qualsiasi posto su un suo bordo, che non sia mediano:

- i) zero ii) uno iii) due iv) tre

3. Dato un sistema materiale formato da due aste omogenee vincolate a scorrere una sull’altra lungo tutta la loro lunghezza, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) quattro ii) sei iii) otto iv) dieci

4. Dato un disco omogeneo vincolato a rotolare senza strisciare su una retta Ox mantenendosi in un piano verticale Oxy, individuare la o le equazioni pure del moto (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica, H = punto di contatto disco-piano):

- i) la 1^a ECD proiettata sul piano verticale ii) la 1^a ECD
iii) il teorema del momento angolare assiale di asse Hz; iv) la 2^a ECD con polo in H

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani, uno per ogni punto materiale: la coordinata θ del punto P vincolato alla circonferenza e la coordinata y del punto Q vincolato all’asse Oy.

Una è la seconda legge di Newton per il punto P proiettata lungo la tangente alla circonferenza:

$$mRd^2\theta/dt^2 = - mg\cos\theta + kycos\theta - m\omega^2R\sin\theta\cos\theta$$

La seconda equazione pura è la seconda legge di Newton per il punto Q proiettata lungo l’asse Oy:

$$2md^2y/dt^2 = - 2mg + kR\sin\theta - ky + A, \text{ con } A = -f_d|kR\cos\theta| \text{ (segn } v_Q)$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

a $t=0$, $\theta(0)=\pi/4$, $d\theta(0)/dt = u_0/R$, $\mathbf{v}_P(0)=u_0\mathbf{t}$, $y(0) = -R$, $\mathbf{v}_Q(0) = w_0\mathbf{j}$, $u_0 > 0$, $w_0 < 0$

$$\phi_{P2}(0) = m(u_0^2/R + \omega^2R/2 + g(2)^{1/2}/2) - kR(1 + (2)^{1/2}/2), \quad \phi_{P3}(0) = (2)^{1/2}m\omega u_0,$$

$$\phi_{Q1}(0) = - kR(2)^{1/2}/2, \quad \phi_{Q3}(0) = 0, \quad A = f_d kR(2)^{1/2}/2$$

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale sono:

$$\theta_{1,2} = \pi/2, 3\pi/2 \text{ con } y_1 = R - 2mg/k \text{ e } y_2 = -R - 2mg/k$$

e

$$0 \leq \theta \leq \pi/3$$

$$5\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$$

$$\text{con } y = (mg + kR\sin\theta)/k$$

iv) Scegliendo la posizione $\theta = \pi/2$, $y = R - 2mg/k$

$$\phi_{P2} = 3mg, \quad \phi_{P3} = 0,$$

$$\phi_{Q1}(0) = 0, \quad \phi_{Q3} = 0, \quad A = 0.$$

Soluzioni quesiti a risposta chiusa

1. ii) – 2. iv) – 3. ii) – 4. iii)

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 16/07/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Un sistema materiale è costituito da una lamina rettangolare omogenea ABCD, con $|AD| = 2L$ e $|AB| = L$. Lungo la mediana EF, essendo E il punto medio del lato AD ed F il corrispondente sul lato BC, passa l’asse scorrevole orizzontale Oy. Sul sistema materiale agiscono:

- a) un momento $\mathbf{M} = k (C'C \times FC')$, con C' proiezione di C sul piano orizzontale Oxy;
- b) una molla di costante elastica $k > 0$ applicata nel punto E della lamina e centro l’origine degli assi.

Supponendo il vincolo in F con attrito, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la lamina è disposta sul piano Oyz con il punto E in quiete, a distanza L da O, ed il punto D avente velocità $\mathbf{v}_D = u_0 \mathbf{i}$, con $u_0 > 0$ ed \mathbf{i} versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno

1. Se un sistema di vettori applicati è riducibile ad una coppia, esso possiede:

- i) invariante scalare non nullo; ii) invariante scalare nullo; iii) invariante scalare positivo;
- iv) invariante scalare negativo.

2. Data una lamina omogenea avente la forma di un triangolo equilatero, dire quanti assi centrali si conoscono a priori:

- i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

3. Dato un punto materiale vincolato a muoversi sulla superficie esterna di un guscio sferico, dire quanti gradi di libertà possiede:

- i) due; ii) tre; iii) quattro; iv) cinque.

4. Per un disco vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale in un piano π , la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è (G baricentro, H punto di contatto disco-guida):

- i) il 2° teorema di Koenig; ii) il 3° teorema di Koenig; iii) $\frac{1}{2} Mv_G^2$; iv) $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_H$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) La lamina possiede due gradi di libertà, e si hanno due equazioni pure corrispondenti ai parametri lagrangiani y_E , coordinata del punto E, e θ , angolo che il piano della lamina forma con il piano Oxy, considerato in verso orario. Un’equazione pura è la 1^a ECD proiettata lungo Oy:

$$m \frac{d^2 y_E}{dt^2} = -ky_E + A$$

dove l’attrito A è dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica:

$$A = -f_d mg/2 \text{ (segn } dy_E/dt)$$

La 2^a equazione pura è data dalla 2^a ECD con polo in E proiettata lungo l’asse Oy:

$$-1/3 mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kL^2 \sin \theta \cos \theta$$

ii) All’istante iniziale le reazioni vincolari sono date da:

$$\phi_{F1}(0) = 0, \quad \phi_{F3}(0) = mg/2, \quad \phi_{E1}(0) = 0, \quad \phi_{E3}(0) = mg/2, \quad A(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio della lamina sono quattro per θ , e la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce quelle per y_E :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = 0, & \theta_3 = \pi/2 \\ \theta_2 = \pi, & \theta_4 = 3\pi/2 \end{array}$$

$$\text{con} \quad -f_s(mg/2k) \leq y_E \leq f_s(mg/2k)$$

iv) Qualunque sia la posizione (θ, y_E) le reazioni vincolari sono costanti:

$$\phi_{F1}(0) = 0, \quad \phi_{F3}(0) = mg/2, \quad \phi_{E1}(0) = 0, \quad \phi_{E3}(0) = mg/2, \quad \text{con } |A| \leq f_s mg/2.$$

Soluzioni quesiti a risposta chiusa

1. ii) – 2. iv) – 3. i) – 4. iv)

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 2/9/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio R , che rotola senza strisciare lungo la retta di equazione $y = -x$, e da un punto materiale P di massa m saldato nel centro C del disco. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il centro C del disco all’origine degli assi. Sul sistema agiscono:

- a) una forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{k}$ applicata nel generico punto T appartenente al bordo del disco, con \mathbf{k} versore dell’asse Oz ;
- b) una coppia di forze di momento $\mathbf{M} = (OH+CH) \times 2mg$ agente sul disco, con H punto di contatto tra disco e retta.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;
- ii) le reazioni vincolari, interne ed esterne, agenti sul sistema all’istante iniziale quando il sistema è in quiete lungo la retta con il punto T nell’origine O .
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità;
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile.

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. In un piano Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una guida parabolica di equazione $y = x^2$. Il sistema di forze apparenti agenti sul punto è riducibile a:

- i) zero; ii) un vettore applicato; iii) una coppia; iv) un vettore e una coppia.

2. Data una sbarra omogenea vincolata con un estremo ad un punto fisso, dire quanti assi centrali d’inerzia si conoscono a priori:

- i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

3. Dato un disco vincolato a rotolare senza strisciare in un piano lungo una guida ellittica, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) zero ii) uno iii) tre iv) cinque

4. Dato un disco omogeneo vincolato in un piano Oxy a scorrere con il baricentro G lungo l’asse Oy ed a ruotare con velocità angolare ω , la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è:

- i) il 3° teorema di Koenig; ii) $1/2\omega \mathbf{K}_G$; iii) $1/2Mv_G^2$; iv) $1/2 M (y_G')^2 + 1/2 I_z \omega^2$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 2/9/2010

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede un grado di libertà, l’angolo θ , preso in verso orario che, per scelta, il raggio CT del disco forma con il raggio CH, con H punto di contatto tra disco e retta di equazione $y=-x$, supponendo che $R\theta(t=t_0)=0$. L’equazione pura è data dalla 2^{\wedge} ECD proiettata sull’asse Hz:

$$(5/2) mR^2 d^2\theta/dt^2 = kR^2\theta - (2)^{1/2}mgR\theta$$

ii) Le reazioni vincolari all’istante iniziale sono date da:

$\phi_{PS}(0) = mg(2)^{1/2}/2(-\rho+\eta)$, con ρ e η versori lungo le direzioni, rispettivamente, parallela e normale alla retta di equazione $y=-x$;

$$\phi_{C3}(0) = 0; \quad \phi_{T3}(0) = -F; \quad \phi_{H1}(0) = -mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H2}(0) = kR+mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

iii) Poiché il sistema di forze agenti è conservativo, applicando il teorema di Dirichlet l’unica posizione di equilibrio, $\theta=0$, sarà:

stabile se $mg(2)^{1/2} < kR$, instabile se $mg(2)^{1/2} > kR$, mentre per ogni θ , con $mg = kR$, si hanno posizioni di equilibrio indifferente.

iv) Scegliendo la posizione $\theta = 0$, con $mg(2)^{1/2} < kR$:

$$\phi_{PS} = mg(2)^{1/2}/2(-\rho+\eta); \quad \phi_{C3} = 0; \quad \phi_{T3} = -F; \quad \phi_{H1} = -mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H2}(0) = kR+mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 16/09/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo.

L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta AB di lunghezza 2R, la cui densità di massa nel generico punto P è data da $\mu(P) = m/R^2|AP|$, $m > 0$. L’asta è vincolata a muoversi con attrito con l’estremo A sull’asse orizzontale Ox. Una forza costante $\mathbf{F} = F \mathbf{k}$, con \mathbf{k} versore dell’asse Oz ed F costante positiva, è applicata nel baricentro G del sistema, mentre una molla di costante elastica $k > 0$ collega l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sull’asse Oy positivo a distanza 2R da O. Sul sistema, inoltre, agisce una coppia di forze di momento $\mathbf{M} = (3/2) k (AG \times OA)$.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse orizzontale Ox con il punto A in quiete nell’origine degli assi e l’estremo B sul semiasse negativo con velocità $\mathbf{v}_B(0) = u_0 \mathbf{j}$, essendo $u_0 > 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy. **(4 punti)**

Ponendo, ora, $mg = (3/4) k R$, g accelerazione di gravità, ed il coefficiente di attrito statico $f_s = \sqrt{3}/3$, determinare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno

1. Data una lamina circolare vincolata a traslare lungo l’asse Oy, passante per il suo centro C e perpendicolare ad essa, in un sistema relativo Oxyz che ruota uniformemente intorno allo stesso asse, dire se il sistema di forze apparenti è riducibile a:

- i) zero
- ii) un vettore applicato
- iii) una coppia
- iv) un vettore e una coppia

2. Dato un sistema materiale costituito da un’asta saldata nel vertice di una lamina quadrata, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema materiale:

- i) sei
- ii) otto
- iii) dieci
- iv) dodici

3. Dato un corpo rigido con un punto fisso, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite (O' = origine solidale):

- i) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$
- ii) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$
- iii) $dL = \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$
- iv) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un punto materiale vincolato con attrito ad un elica cilindrica, la, o le, equazioni pure del moto sono date da (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica):

- i) la 1^a ECD
- ii) la 2^a legge di Newton proiettata sulla normale all’elica
- iii) la 2^a ECD proiettata sul piano normale all’elica
- iv) la 2^a legge di Newton proiettata sulla tangente all’elica

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione *on-line* in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani: l’angolo θ che l’asta forma con l’asse Ox misurato in verso antiorario, e la coordinata x_A del vertice A dell’asta che trasla lungo l’asse Ox.

Una è la prima ECD proiettata lungo l’asse Ox:

$$2m \frac{d^2 x_A}{dt^2} - \frac{8}{3} mR \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \theta + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \right] = -k(x_A + 2R \cos \theta) + A$$

$$A = -f_d (\phi_{A2}^2 + \phi_{A3}^2)^{1/2} \text{segn}(v_A)$$

$$\phi_{A2} = \frac{8}{3} mR \left[\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right] + 2mg + 2kR(\sin \theta - 1)$$

$$\phi_{A3} = 0$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Az per l’asta:

$$4 mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{8}{3} mR \frac{d^2 x_A}{dt^2} \sin \theta = 4 kR^2 \cos \theta - \frac{8}{3} mgR \cos \theta.$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

$$\phi_{G3}(0) = -F, \quad \phi_{A2}(0) = \frac{2}{3} kR + \frac{2}{9} mg, \quad \phi_{A3}(0) = 0, \quad A(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per θ sono $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 3\pi/2$ mentre per x_A :

$$\theta = \theta_1 = \pi/2 \quad \rightarrow \quad -R \sqrt{3}/2 \leq x_A \leq R \sqrt{3}/2$$

$$\theta = \theta_2 = 3\pi/2 \quad \rightarrow \quad -R \sqrt{5}/[2\sqrt{3}] \leq x_A \leq R \sqrt{5}/[2\sqrt{3}]$$

iv) Scelgo la posizione $x_A = 0$ e $\theta = \theta_1 = \pi/2$:

$$\phi_{G3}(0) = -F, \quad \phi_{A2}(0) = \frac{3}{2} kR, \quad \phi_{A3}(0) = 0, \quad |A| \leq kR \sqrt{3}/2$$