

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 07/07/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un punto materiale P, di massa $2m$, vincolato a muoversi con attrito sull’asse verticale Oy e da un disco omogeneo di massa m e raggio R , vincolato a rotolare senza strisciare lungo l’asse orizzontale Ox.

Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P con il baricentro C del disco, mentre un’altra molla di costante elastica $h > 0$ collega il punto P ad un punto fisso situato sul semiasse verticale positivo Oy a distanza $3R$ da O. Sul disco agisce un momento $\mathbf{M} = k(\mathbf{OH} \times \mathbf{CT})$, con H punto di contatto tra disco e guida, e T punto prefissato appartenente al bordo del disco.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
 - ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando il punto si trova sul semiasse verticale positivo a distanza R da O con velocità $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{j}$, con $u_0 < 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy, mentre il disco è posto sul semiasse orizzontale positivo Ox con il baricentro C a distanza $\pi R/2$ dall’asse verticale Oy avente velocità $\mathbf{v}_C = w_0 \mathbf{i}$, con $w_0 > 0$ e \mathbf{i} il versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- Posto, quindi, $mg = hR = kR$, determinare:
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
 - iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Data una sbarra omogenea di lunghezza L vincolata nel piano Oxy a scorrere con un estremo sull’asse Ox, dire quanti assi centrali d’inerzia sono assi principali rispetto all’origine O degli assi:

- i) zero;
- ii) **uno**;
- iii) due;
- iv) tre.

2. Data una biglia vincolata a rotolare senza strisciare nel piano verticale all’interno di una guida circolare, dire quanti gradi di libertà possiede:

- i) due
- ii) tre
- iii) **quattro**
- iv) cinque

3. Data un’asta omogenea vincolata con il baricentro G a traslare senza ruotare lungo la bisettrice del 1° e 3° quadrante del piano Oxy, individuare la, o le, equazioni pure del moto:

i) la 1^a ECD proiettata nel piano; ii) **la 1^a ECD proiettata lungo la bisettrice**; iii) la 2^a ECD con polo in G proiettata lungo la normale al piano; iv) la 2^a legge di Newton proiettata nel piano.

4. Indicare la formula ottimale per il calcolo del momento angolare di una lamina quadrata vincolata a muoversi con un suo vertice fisso A:

- i) il 2° teorema di Koenig;
- ii) $AG \times m\mathbf{v}_G$;
- iii) **$\sigma_A \omega$** ;
- iv) $AG \times M\mathbf{v}_G + \sigma_G \omega$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà: l’ordinata del punto y_P e l’angolo θ , preso in verso orario che, per scelta, il raggio OT del disco forma con il raggio OH, con H punto di contatto tra disco e asse Ox, supponendo che $R\theta(t=t_0)=0$.

Un’equazione pura si ottiene dalla 2^a legge di Newton per il punto P proiettata sull’asse Oy:

$$2m \frac{d^2 y_P}{dt^2} = -2mg - h(y_P - 3R) + k(R - y_P) + A, \text{ con } A = -f_d |kR\theta| \text{ (segn } v_P)$$

L’altra equazione pura si ottiene dalla 2^a ECD per il disco proiettata sull’asse Hz:

$$-3/2 mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kR^2 \theta (1 - \cos \theta)$$

ii) Le reazioni vincolari all’istante iniziale sono date da:

$$\phi_{P1}(0) = -kR\pi/2, \quad \phi_{P3}(0) = 0, \quad A_P(0) = f_d kR\pi/2$$

$$\phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0, \quad \phi_{H1}(0) = kR\pi/6, \quad \phi_{H2}(0) = mg; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per il disco sono due per θ , e la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce le corrispondenti per y_P :

$$\theta_1 = 0, \quad y_{P1} = R; \quad \text{-----} \quad \theta_2 = 2\pi, \quad -f_s \pi R + R \leq y_{P1} \leq f_s \pi R + R;$$

iv) Scegliendo la prima posizione d’equilibrio $\theta_1 = 0$ e $y_{P1} = R$, si ottengono le seguenti reazioni vincolari all’equilibrio:

$$\phi_{P1}(0) = 0, \quad \phi_{P3}(0) = 0, \quad A_P(0) = 0$$

$$\phi_{C3}(0) = \phi_{T3}(0) = 0, \quad \phi_{H1}(0) = 0, \quad \phi_{H2}(0) = mg, \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 22/07/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manuale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta omogenea AB, di massa m e lunghezza 2L, vincolata a muoversi con il baricentro G sull’asse orizzontale Ox.

Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica $h > 0$ collegante l’origine degli assi con l’estremo A dell’asta;

II) una molla di costante elastica $k > 0$ collegante l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sul semiasse orizzontale positivo Ox a distanza 4L da O;

III) un momento $M = (23 h)/3$ ($B'B \times GB'$), con B' proiezione dell’estremo B sull’asse orizzontale Ox.

Supponendo il piano ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse orizzontale Ox con il baricentro in quiete nell’origine degli assi e l’estremo B sul semiasse positivo con velocità $v_B = u_0 \mathbf{j}$, essendo $u_0 > 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy; **(4 punti)**

Posto, quindi, $h = k = m\omega^2$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(7 punti)**

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Data una lamina vincolata a ruotare intorno ad un suo lato fisso OA in un sistema relativo Oxyz soggetto a traslare uniformemente lungo la direzione Oy, dire se il sistema di forze di trascinamento è riducibile a:

i) **zero** ii) un vettore applicato iii) una coppia iv) un vettore e una coppia

2. Dato un cilindro vincolato col suo asse a scorrere e ruotare lungo un’asse r, dire quante componenti hanno le relative reazioni vincolari:

i) due ii) tre iii) **quattro** iv) cinque

3. Dato un corpo rigido, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite (O' = origine solidale):

i) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$ ii) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$ iii) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$ iv) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un punto P di massa m vincolato a ruotare lungo una circonferenza di centro C nel piano verticale la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è data da:

i) il 3° teorema di Koenig ii) $\frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2$ iii) $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_C$ iv) $\frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede due gradi di libertà, ed i parametri lagrangiani sono dati dall’ascissa x_G del baricentro e dall’angolo θ che l’asta forma con l’asse Ox , considerato in verso antiorario. Un’equazione pura è data dalla 1^a equazione cardinale della dinamica proiettata sull’asse Ox

$$m \, dx_G^2 / dt^2 = -h(x_G - L \cos\theta) - k(x_G + L \cos\theta - 4L) + m\omega^2 x_G,$$

mentre l’altra equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse Gz :

$$1/3 \, mL^2 \, d^2\theta/dt^2 = -hLx_G \sin\theta + kL \sin\theta (x_G + 4L) - 1/3 \, m\omega^2 L^2 \sin\theta \cos\theta - 23/3 \, hL^2 \sin\theta \cos\theta .$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\Psi(0) = 0, \phi_{G2}(0) = mg, \phi_{G3}(0) = 0$$

(se il vincolo di rotazione è realizzato con una reazione puntuale in B , $\phi_{B3}(0) = 0$)

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce una posizione di equilibrio per x_G , e quattro posizioni di equilibrio per θ :

$$\begin{array}{ll} x_G = 4L, \theta_1 = 0, & \rightarrow H > 0 \text{ stabile} \\ x_G = 4L, \theta_3 = 2\pi/3, & \rightarrow H < 0 \text{ instabile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_G = 4L, \theta_2 = \pi, & \rightarrow H > 0 \text{ stabile} \\ x_G = 4L, \theta_4 = 4\pi/3, & \rightarrow H < 0 \text{ instabile} \end{array}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione $x_G = 4L, \theta_3 = 0$, si ha:

$$\Psi = 0, \phi_{G2} = mg, \phi_{G3} = 0$$

(se il vincolo di rotazione è realizzato con la reazione puntuale in B , $\phi_{B3}(0) = 0$).

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 03/09/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Nel piano verticale Oxy un punto materiale P di massa $2m$ è vincolato a muoversi lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante, mentre un altro punto materiale Q di massa m è vincolato a muoversi lungo la parabola di equazione $y = -\alpha x^2$, con $\alpha > 0$.

I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica $h > 0$, mentre una molla di costante elastica $k > 0$ collega il punto P ad un punto fisso H situato sul semiasse verticale positivo a distanza R da O; inoltre sul punto Q agisce una forza $\mathbf{F}_Q = 2 h \alpha^2 x^3 \mathbf{i}$, con \mathbf{i} versore dell’asse Ox ed x ascissa del punto P.

Supponendo che il piano Oxy ruoti uniformemente intorno all’asse Oy, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari all’istante iniziale, quando il punto P si trova nel primo quadrante a distanza R da O con velocità di modulo $u_0 > 0$ nel verso di crescita della bisettrice, mentre il punto Q è in quiete nell’origine degli assi. **(4 punti)**

Supponendo, invece, il piano Oxy fisso e le costanti così fissate: $h = k$, $2mg = kR$ ed $\alpha = R^{-1}$, determinare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio stabile del sistema. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. In un piano Ors che ruota uniformemente attorno all’asse r, un’asta omogenea è vincolata a traslare perpendicolarmente col suo punto medio M sull’asse Or stessa, dire se il sistema di forze assifughe agenti su di essa è riducibile a:

- i) zero
- ii) un vettore applicato
- iii) una coppia
- iv) un vettore e una coppia

2. Dato un arco di circonferenza omogeneo di apertura angolare α , dire quanti assi centrali si conoscono a priori:

- i) zero
- ii) uno
- iii) due
- iv) tre

3. Dato un sistema materiale formato da due aste omogenee di lunghezza L fra loro incernierate, con il vertice di una saldato in un punto P, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema materiale:

- i) due
- ii) quattro
- iii) sei
- iv) otto

4. Dato un disco omogeneo vincolato a rotolare senza strisciare su una retta Ox mantenendosi in un piano verticale Oxy, individuare la o le equazioni pure del moto (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica, H = punto di contatto disco-piano):

- i) la 1^a ECD proiettata sul piano verticale
- ii) la 1^a ECD
- iii) il teorema del momento angolare assiale di asse Hz;
- iv) la 2^a ECD con polo in H

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2008/2009 – Appello del 3/3/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse verticale Oy, un sistema materiale è costituito da una sbarra omogenea AB di lunghezza 2R, vincolata con il punto medio C ad un punto del semiasse positivo Oy posto a distanza R dall’origine. Una molla di costante elastica $h > 0$ collega l’estremo B della sbarra ad un punto fisso H posto a distanza R dall’origine sul semiasse positivo Ox. Sulla sbarra, inoltre, agisce un momento $\mathbf{M} = h(\mathbf{OH} \times \mathbf{CB})$.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la sbarra è disposta con l’estremo A nell’origine O e l’estremo B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0 \mathbf{i}$, con $u_0 > 0$ ed \mathbf{i} il versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile a scelta. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un sistema materiale formato da due punti vincolati a muoversi lungo un asse r a distanza d fra di loro, il momento di inerzia rispetto all’asse r è dato da:

- i) un numero reale positivo; ii) un numero reale negativo; iii) zero; iv) un numero complesso

2. Data un’asta rigida vincolata con il proprio baricentro G ad una circonferenza di raggio R e centro C, indicare la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica:

- i) $\frac{1}{2} m v_G^2$; ii) $\frac{1}{2} \sum_i m v_i^2$; iii) $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_G \boldsymbol{\omega})$; iv) il 3° teorema di Koenig.

3. Data una lamina quadrata omogenea vincolata a traslare con un lato lungo l’asse Ox, dire quanti assi centrali sono principali rispetto all’origine O:

- i) zero ; ii) uno; iii) due; iv) tre.

4. Dato un disco vincolato con un punto fisso del suo bordo a muoversi in un piano, indicare la, o le, equazioni pure del moto (EC = equazione cardinale):

- i) la 1^a EC; ii) la 2^a EC; iii) le due EC; iv) la 2^a EC assiale.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA E CFU:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Il sistema materiale possiede un grado di libertà, ed il parametro lagrangiano è dato dall’angolo θ tra il piano Cyz ed il piano $C\eta z$, con η asse solidale all’asta. L’equazione pura è data dal teorema del momento angolare assiale di asse Cz :

$$(1/3) mR^2 d^2\theta/dt^2 = - hR^2 \cos\theta - (1/3) mR^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

ii) All’istante iniziale i vincoli sono dati da:

$$\phi_{C1}(0) = - hR, \quad \phi_{C2}(0) = mg + 2hR, \quad \phi_{C3}(0) = (2/3) m\omega u_0, \quad \phi_{B3}(0) = -(2/3) m\omega u_0 \text{ (oppure, se il vincolo è realizzato con un momento, } \Psi_B(0) = -(2/3) m\omega u_0 R, \phi_{C3}(0) = 0)$$

iii) Il sistema di forze agenti è conservativo, e il teorema di Dirichlet fornisce quattro posizioni di equilibrio per θ :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = \pi/2, & \rightarrow H > 0, \text{ instabile} \\ \theta_2 = 3\pi/2, & \rightarrow H > 0, \text{ instabile} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \theta_3 = \arcsin[-(3h)/(m\omega^2)], & \rightarrow H < 0, \text{ stabile, con } h < m\omega^2/3 \\ \theta_4 = \pi - \theta_3, & \rightarrow H < 0, \text{ stabile, con } h < m\omega^2/3 \end{array}$$

iv) Scegliendo, dunque, la posizione $\theta = \theta_3 = \arcsin[-(3h)/(m\omega^2)]$, si ha:

$$\phi_{C1}(\theta_3) = hR \left(\sqrt{1 - \frac{9h^2}{m^2\omega^4}} - 1 \right), \quad \phi_{C2}(\theta_3) = mg + hR \left(1 - \frac{3h}{m\omega^2} \right), \quad \phi_{C3}(\theta_3) = 0, \quad \phi_{B3}(\theta_3) = 0 \text{ (oppure, se il vincolo è realizzato con un momento, } \Psi_B(\theta_3) = 0, \phi_{C3}(\theta_3) = 0)$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 02/07/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabale di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascuno quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo una circonferenza di raggio R disposta nel piano verticale Oxy , mentre un altro punto Q di massa $2m$ è vincolato a muoversi con attrito lungo l’asse Oy . I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Supponendo il piano Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy con velocità angolare costante ω , determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto; **(7 punti)**;
- ii) le reazioni vincolari all’istante iniziale, quando il punto P interseca nel primo quadrante la retta di equazione $y=x$ con velocità $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{t}$, essendo \mathbf{t} il versore tangente alla circonferenza in P ed $u_0 > 0$, mentre il punto Q si trova a quota $-R$ da O con velocità $\mathbf{v}_Q = w_0 \mathbf{j}$, $w_0 < 0$ e \mathbf{j} versore dell’asse Oy . **(4 punti)**
Posto ora $m\omega^2 = k$ ed $f_s = 6mg/(kR) < 1$, calcolare inoltre:
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio a scelta. **(4 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Un disco omogeneo è vincolato a rotolare senza strisciare lungo l’asse Ox di un sistema $Oxyz$ traslante uniformemente lungo la direzione Ox . Il sistema di forze apparenti agenti su di esso è riducibile a:

- i) zero ii) un vettore applicato iii) una coppia iv) un vettore e una coppia

2. Data una lamina quadrata omogenea di lato L , dire quanti assi centrali sono principali rispetto ad un punto qualsiasi posto su un suo bordo, che non sia mediano:

- i) zero ii) uno iii) due iv) tre

3. Dato un sistema materiale formato da due aste omogenee vincolate a scorrere una sull’altra lungo tutta la loro lunghezza, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) quattro ii) sei iii) otto iv) dieci

4. Dato un disco omogeneo vincolato a rotolare senza strisciare su una retta Ox mantenendosi in un piano verticale Oxy , individuare la o le equazioni pure del moto (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica, H = punto di contatto disco-piano):

- i) la 1^a ECD proiettata sul piano verticale ii) la 1^a ECD
iii) il teorema del momento angolare assiale di asse H_z ; iv) la 2^a ECD con polo in H

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani, uno per ogni punto materiale: la coordinata θ del punto P vincolato alla circonferenza e la coordinata y del punto Q vincolato all’asse Oy.

Una è la seconda legge di Newton per il punto P proiettata lungo la tangente alla circonferenza:

$$mRd^2\theta/dt^2 = - mg\cos\theta + kycos\theta - m\omega^2R\sin\theta\cos\theta$$

La seconda equazione pura è la seconda legge di Newton per il punto Q proiettata lungo l’asse Oy:

$$2md^2y/dt^2 = - 2mg + kR\sin\theta - ky + A, \text{ con } A = -f_d|kR\cos\theta| \text{ (segn } v_Q)$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

a $t=0$, $\theta(0)=\pi/4$, $d\theta(0)/dt = u_0/R$, $\mathbf{v}_P(0)=u_0\mathbf{t}$, $y(0) = -R$, $\mathbf{v}_Q(0) = w_0\mathbf{j}$, $u_0 > 0$, $w_0 < 0$

$$\phi_{P2}(0) = m(u_0^2/R + \omega^2R/2 + g(2)^{1/2}/2) - kR(1 + (2)^{1/2}/2), \quad \phi_{P3}(0) = (2)^{1/2}m\omega u_0,$$

$$\phi_{Q1}(0) = - kR(2)^{1/2}/2, \quad \phi_{Q3}(0) = 0, \quad A = f_d kR(2)^{1/2}/2$$

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale sono:

$$\theta_{1,2} = \pi/2, 3\pi/2 \text{ con } y_1 = R - 2mg/k \text{ e } y_2 = -R - 2mg/k$$

e

$$0 \leq \theta \leq \pi/3$$

$$5\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$$

$$\text{con } y = (mg + kR\sin\theta)/k$$

iv) Scegliendo la posizione $\theta = \pi/2$, $y = R - 2mg/k$

$$\phi_{P2} = 3mg, \quad \phi_{P3} = 0,$$

$$\phi_{Q1}(0) = 0, \quad \phi_{Q3} = 0, \quad A = 0.$$

Soluzioni quesiti a risposta chiusa

1. ii) – 2. iv) – 3. ii) – 4. iii)

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 16/07/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Un sistema materiale è costituito da una lamina rettangolare omogenea ABCD, con $|AD| = 2L$ e $|AB| = L$. Lungo la mediana EF, essendo E il punto medio del lato AD ed F il corrispondente sul lato BC, passa l’asse scorrevole orizzontale Oy. Sul sistema materiale agiscono:

- a) un momento $\mathbf{M} = k (C'C \times FC')$, con C' proiezione di C sul piano orizzontale Oxy;
- b) una molla di costante elastica $k > 0$ applicata nel punto E della lamina e centro l’origine degli assi.

Supponendo il vincolo in F con attrito, determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la lamina è disposta sul piano Oyz con il punto E in quiete, a distanza L da O, ed il punto D avente velocità $\mathbf{v}_D = u_0 \mathbf{i}$, con $u_0 > 0$ ed \mathbf{i} versore dell’asse Ox; **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno

1. Se un sistema di vettori applicati è riducibile ad una coppia, esso possiede:

- i) invariante scalare non nullo; ii) invariante scalare nullo; iii) invariante scalare positivo;
- iv) invariante scalare negativo.

2. Data una lamina omogenea avente la forma di un triangolo equilatero, dire quanti assi centrali si conoscono a priori:

- i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

3. Dato un punto materiale vincolato a muoversi sulla superficie esterna di un guscio sferico, dire quanti gradi di libertà possiede:

- i) due; ii) tre; iii) quattro; iv) cinque.

4. Per un disco vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida orizzontale in un piano π , la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è (G baricentro, H punto di contatto disco-guida):

- i) il 2° teorema di Koenig; ii) il 3° teorema di Koenig; iii) $\frac{1}{2} Mv_G^2$; iv) $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_H$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) La lamina possiede due gradi di libertà, e si hanno due equazioni pure corrispondenti ai parametri lagrangiani y_E , coordinata del punto E, e θ , angolo che il piano della lamina forma con il piano Oxy, considerato in verso orario. Un’equazione pura è la 1^a ECD proiettata lungo Oy:

$$m \frac{d^2 y_E}{dt^2} = -ky_E + A$$

dove l’attrito A è dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica:

$$A = -f_d mg/2 \text{ (segn } dy_E/dt)$$

La 2^a equazione pura è data dalla 2^a ECD con polo in E proiettata lungo l’asse Oy:

$$-1/3 mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kL^2 \sin \theta \cos \theta$$

ii) All’istante iniziale le reazioni vincolari sono date da:

$$\phi_{F1}(0) = 0, \quad \phi_{F3}(0) = mg/2, \quad \phi_{E1}(0) = 0, \quad \phi_{E3}(0) = mg/2, \quad A(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio della lamina sono quattro per θ , e la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce quelle per y_E :

$$\begin{array}{ll} \theta_1 = 0, & \theta_3 = \pi/2 \\ \theta_2 = \pi, & \theta_4 = 3\pi/2 \end{array}$$

$$\text{con} \quad -f_s(mg/2k) \leq y_E \leq f_s(mg/2k)$$

iv) Qualunque sia la posizione (θ, y_E) le reazioni vincolari sono costanti:

$$\phi_{F1}(0) = 0, \quad \phi_{F3}(0) = mg/2, \quad \phi_{E1}(0) = 0, \quad \phi_{E3}(0) = mg/2, \quad \text{con } |A| \leq f_s mg/2.$$

Soluzioni quesiti a risposta chiusa

1. ii) – 2. iv) – 3. i) – 4. iv)

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 2/9/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un disco omogeneo di massa m e raggio R , che rotola senza strisciare lungo la retta di equazione $y = -x$, e da un punto materiale P di massa m saldato nel centro C del disco. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il centro C del disco all’origine degli assi. Sul sistema agiscono:

- a) una forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{k}$ applicata nel generico punto T appartenente al bordo del disco, con \mathbf{k} versore dell’asse Oz;
- b) una coppia di forze di momento $\mathbf{M} = (\text{OH} + \text{CH}) \times 2mg$ agente sul disco, con H punto di contatto tra disco e retta.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;
- ii) le reazioni vincolari, interne ed esterne, agenti sul sistema all’istante iniziale quando il sistema è in quiete lungo la retta con il punto T nell’origine O .
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità;
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile.

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. In un piano Oxy ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una guida parabolica di equazione $y = x^2$. Il sistema di forze apparenti agenti sul punto è riducibile a:

- i) zero; ii) un vettore applicato; iii) una coppia; iv) un vettore e una coppia.

2. Data una sbarra omogenea vincolata con un estremo ad un punto fisso, dire quanti assi centrali d’inerzia si conoscono a priori:

- i) zero; ii) uno; iii) due; iv) tre.

3. Dato un disco vincolato a rotolare senza strisciare in un piano lungo una guida ellittica, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema:

- i) zero ii) uno iii) tre iv) cinque

4. Dato un disco omogeneo vincolato in un piano Oxy a scorrere con il baricentro G lungo l’asse Oy ed a ruotare con velocità angolare ω , la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è:

- i) il 3° teorema di Koenig; ii) $1/2\omega \mathbf{K}_G$; iii) $1/2Mv_G^2$; iv) $1/2 M (y_G')^2 + 1/2 I_z \omega^2$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 2/9/2010

SOLUZIONI

i) Il sistema possiede un grado di libertà, l’angolo θ , preso in verso orario che, per scelta, il raggio CT del disco forma con il raggio CH, con H punto di contatto tra disco e retta di equazione $y=-x$, supponendo che $R\theta(t=t_0)=0$. L’equazione pura è data dalla 2^{\wedge} ECD proiettata sull’asse Hz:

$$(5/2) mR^2 d^2\theta/dt^2 = kR^2\theta - (2)^{1/2}mgR\theta$$

ii) Le reazioni vincolari all’istante iniziale sono date da:

$\phi_{PS}(0) = mg(2)^{1/2}/2(-\rho+\eta)$, con ρ e η versori lungo le direzioni, rispettivamente, parallela e normale alla retta di equazione $y=-x$;

$$\phi_{C3}(0) = 0; \quad \phi_{T3}(0) = -F; \quad \phi_{H1}(0) = -mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H2}(0) = kR+mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

iii) Poiché il sistema di forze agenti è conservativo, applicando il teorema di Dirichlet l’unica posizione di equilibrio, $\theta=0$, sarà:

stabile se $mg(2)^{1/2} < kR$, instabile se $mg(2)^{1/2} > kR$, mentre per ogni θ , con $mg = kR$, si hanno posizioni di equilibrio indifferente.

iv) Scegliendo la posizione $\theta = 0$, con $mg(2)^{1/2} < kR$:

$$\phi_{PS} = mg(2)^{1/2}/2(-\rho+\eta); \quad \phi_{C3} = 0; \quad \phi_{T3} = -F; \quad \phi_{H1} = -mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H2}(0) = kR+mg(2)^{1/2}; \quad \phi_{H3}(0) = 0$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2009/2010 – Appello del 16/09/2010

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo.

L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un’asta AB di lunghezza 2R, la cui densità di massa nel generico punto P è data da $\mu(P) = m/R^2|AP|$, $m > 0$. L’asta è vincolata a muoversi con attrito con l’estremo A sull’asse orizzontale Ox. Una forza costante $\mathbf{F} = F \mathbf{k}$, con \mathbf{k} versore dell’asse Oz ed F costante positiva, è applicata nel baricentro G del sistema, mentre una molla di costante elastica $k > 0$ collega l’estremo B dell’asta ad un punto Q posto sull’asse Oy positivo a distanza 2R da O. Sul sistema, inoltre, agisce una coppia di forze di momento $\mathbf{M} = (3/2) k (AG \times OA)$.

Determinare:

- i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; **(8 punti)**
- ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta è disposta lungo l’asse orizzontale Ox con il punto A in quiete nell’origine degli assi e l’estremo B sul semiasse negativo con velocità $\mathbf{v}_B(0) = u_0 \mathbf{j}$, essendo $u_0 > 0$ e \mathbf{j} il versore dell’asse Oy. **(4 punti)**

Ponendo, ora, $mg = (3/4) k R$, g accelerazione di gravità, ed il coefficiente di attrito statico $f_s = \sqrt{3}/3$, determinare:

- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; **(7 punti)**
- iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. **(3 punti)**

Quesiti a risposta chiusa del valore di 2 punti ciascuno

1. Data una lamina circolare vincolata a traslare lungo l’asse Oy, passante per il suo centro C e perpendicolare ad essa, in un sistema relativo Oxyz che ruota uniformemente intorno allo stesso asse, dire se il sistema di forze apparenti è riducibile a:

- i) zero
- ii) un vettore applicato
- iii) una coppia
- iv) un vettore e una coppia

2. Dato un sistema materiale costituito da un’asta saldata nel vertice di una lamina quadrata, dire quanti gradi di libertà possiede il sistema materiale:

- i) sei
- ii) otto
- iii) dieci
- iv) dodici

3. Dato un corpo rigido con un punto fisso, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del lavoro elementare compiuto da un sistema di forze distribuite (O' = origine solidale):

- i) $dL = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{P}_i$
- ii) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}' + \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$
- iii) $dL = \mathbf{M}_{O'} \cdot d\boldsymbol{\Theta}$
- iv) $dL = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{O}'$

4. Dato un punto materiale vincolato con attrito ad un elica cilindrica, la, o le, equazioni pure del moto sono date da (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica):

- i) la 1^a ECD
- ii) la 2^a legge di Newton proiettata sulla normale all’elica
- iii) la 2^a ECD proiettata sul piano normale all’elica
- iv) la 2^a legge di Newton proiettata sulla tangente all’elica

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione *on-line* in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani: l’angolo θ che l’asta forma con l’asse Ox misurato in verso antiorario, e la coordinata x_A del vertice A dell’asta che trasla lungo l’asse Ox.

Una è la prima ECD proiettata lungo l’asse Ox:

$$2m \frac{d^2 x_A}{dt^2} - 8/3 mR [d^2 \theta / dt^2 \sin \theta + (d\theta / dt)^2 \cos \theta] = -k(x_A + 2R \cos \theta) + A$$

$$A = -f_d (\phi_{A2}^2 + \phi_{A3}^2)^{1/2} \text{segn}(v_A)$$

$$\phi_{A2} = 8/3 mR [d^2 \theta / dt^2 \cos \theta - (d\theta / dt)^2 \sin \theta] + 2mg + 2kR(\sin \theta - 1)$$

$$\phi_{A3} = 0$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Az per l’asta:

$$4 mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 8/3 mR \frac{d^2 x_A}{dt^2} \sin \theta = 4 kR^2 \cos \theta - 8/3 mgR \cos \theta.$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

$$\phi_{G3}(0) = -F, \quad \phi_{A2}(0) = 2/3 kR + 2/9 mg, \quad \phi_{A3}(0) = 0, \quad A(0) = 0$$

iii) Le posizioni di equilibrio per θ sono $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 3\pi/2$ mentre per x_A :

$$\theta = \theta_1 = \pi/2 \quad \rightarrow \quad -R (3)^{1/2}/2 \leq x_A \leq R (3)^{1/2}/2$$

$$\theta = \theta_2 = 3\pi/2 \quad \rightarrow \quad -R 5/[2(3)^{1/2}] \leq x_A \leq R 5/[2(3)^{1/2}]$$

iv) Scelgo la posizione $x_A = 0$ e $\theta = \theta_1 = \pi/2$:

$$\phi_{G3}(0) = -F, \quad \phi_{A2}(0) = 3/2 kR, \quad \phi_{A3}(0) = 0, \quad |A| \leq kR (3)^{1/2}/2$$