Università degli Studi "**Mediterranea**" di Reggio Calabria
Facoltà d'Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 26/06/2008

Esercizio (il cui punto i) è obbligatorio)
Valore domande: i) 11 punti, ii) 6 punti, iii) 7 punti, iv) 4 punti.

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza L, vincolata con l'estremo A nell'origine degli assi, mentre nell'estremo B è saldato un punto materiale T di massa 2m. Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica $k > 0$ applicata nel baricentro del sistema e centro il punto Q posto sull'asse verticale Oy a distanza 2L da O;

II) un momento $\mathbf{M} = (OB' \times m\mathbf{g})/6$ agente sull'asta, con $\mathbf{g}$ accelerazione di gravità e B' proiezione di B sull'asse orizzontale Ox.

Supponendo il piano Oxy ruotante uniformemente intorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ ed i vincoli perfetti, determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;

ii) le reazioni vincolari, interne ed esterne, agenti sul sistema all'istante iniziale quando l'asta è disposta sull'asse Ox con l'estremo B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0\, \mathbf{j}$, $u_0 > 0$.

Supponendo, inoltre, che le costanti del moto siano legate dalle seguenti relazioni, e cioè $mg = kL = m\omega^2 L$, determinare:

iii) le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità;

iv) le reazioni vincolari in una posizione di equilibrio stabile.

Quesiti (**ogni risposta esatta vale due punti**)

1. Un sistema di vettori applicati paralleli concordi è riducibile a:
i) zero; ii) una coppia; iii) **un vettore applicato**; iv) un vettore e una coppia.

2. Dato un sistema costituito da due gusci sferici omogenei concentrici, di masse uguali, dire quanti assi centrali d'inerzia si conoscono a priori:
i) nessuno; ii) uno; iii) due; iv) **tre**.

3. Date due aste AB e BC nello spazio, incernierate tra loro per l'estremo B ed inoltre con l'estremo A vincolato ad un piano, dire quante componenti hanno le relative reazioni vincolari nel caso in cui i vincoli siano perfetti:
i) tre; ii) **quattro**; iii) cinque; iv) sette.

4. Date due aste saldate tra loro per un estremo O, vincolate a scorrere con O su una retta r ed a ruotare mantenendosi ortogonali ad essa. Dire quali sono la (o le) equazioni pure del moto (EC = Equazione Cardinale):
i) il Teorema del momento angolare assiale; ii) **le due EC proiettate su Or**;
iii) le due EC proiettate ortogonalmente ad Or; iv) le due EC.

SOLUZIONI DELL'ESERCIZIO DEL 26/06/2008

i) Il sistema materiale possiede un grado di libertà; se prendiamo come parametro lagrangiano l'angolo θ che l'asta forma con l'asse Ox, considerato in verso antiorario, l'equazione pura del moto è data dal teorema del momento angolare assiale di asse Oz:

$$mL^2\, d^2\theta/dt^2 = 5/7\, kL^2\cos\theta - 8/7\, mgL\cos\theta - mL^2\omega^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta.$$

ii) All'istante iniziale i vincoli esterni sono dati da:

$$\phi_{O1}(0) = -5\, mu_0^2/(2L) + 5/6*kL - 5/2*mL\omega^2,$$
$$\phi_{O2}(0) = 1/7*mg - 3/14*kL, \quad \phi_{O3}(0) = \phi_{B3}(0) = 0,$$

mentre il vincolo interno di saldatura è:

$$\phi_{T1}(0) = 2m\,(\omega^2 L - u_0^2/L), \quad \phi_{T2}(0) = 10kL/7 - 2mg/7, \quad \phi_{T3}(0) = 0.$$

iii) Il sistema di forze attive agenti è conservativo e giroscopico ed i vincoli sono perfetti, dunque il teorema di Dirichlet fornisce quattro posizioni di equilibrio per θ:

$\theta_1 = \pi/2$ ➔ $H(\theta_1) > 0$ e la posizione di equilibrio è instabile,
$\theta_2 = 3\pi/2$, ➔ $H(\theta_2) > 0$ e la posizione di equilibrio è instabile,
$\theta_3 = \mathrm{arcsen}(-3/7)$, ➔ $H(\theta_3) < 0$ e la posizione di equilibrio è stabile,
$\theta_4 = \pi + \theta_3$, ➔ $H(\theta_4) < 0$ e la posizione di equilibrio è stabile.

iv) Scegliendo come posizione di equilibrio stabile $\theta_3 = \mathrm{arcsen}(-3/7)$, si ha:

$$\phi_{O1}(\theta_3) = -10kL\ \mathrm{sqrt}(10)/21, \quad \phi_{O2}(\theta_3) = 9kL/14, \quad \phi_{O3}(\theta_3) = \phi_{B3}(\theta_3) = 0$$
$$\phi_{T1}(\theta_3) = -4kL\ \mathrm{sqrt}(10)/7, \quad \phi_{T2}(\theta_3) = 2kL, \quad \phi_{T3}(\theta_3) = 0,$$

dove sqrt(10) indica la radice quadrata di 10.

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 14/07/2008

Esercizio (il cui punto i) è obbligatorio)
Valore domande: i) 10 punti, ii) 6 punti, iii) 7 punti, iv) 4 punti.

Un sistema materiale è costituito da una lamina quadrata omogenea ABCD, dilato L e massa m, vincolata nei punti D ed F del lato AD (F essendone il punto medio) all’asse scorrevole orizzontale Ox. Sul sistema materiale agiscono:

I) un momento **M** = 2k (AB’ x AB), con B’ proiezione di B sul piano orizzontale Oxz e $k > 0$;

II) una molla di costante elastica k applicata nel vertice B della lamina e centro il punto B’ suddetto;

III) una molla di costante elastica $h > 0$ applicata nel vertice A della lamina e centro l’origine O della terna fissa.

Supponendo il solo vincolo in F con attrito, determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando la lamina è disposta sul piano Oxz con il punto A in quiete, a distanza L da O, ed il punto B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0\,\mathbf{j}$, $u_0 > 0$.

Posto, inoltre, $mg = kL = hL$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale;

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta.

Quesiti (**ogni risposta esatta vale due punti**)

1. Dato un sistema di vettori applicati con l’invariante scalare non nullo, esso è riducibile a:

i) zero; ii) un vettore applicato; iii) una coppia; iv) **<u>un vettore e una coppia</u>**.

2. Data una lamina omogenea avente la forma di un semicerchio, dire quanti assi centrali d’inerzia sono anche assi principali rispetto ad un punto proiezione del vertice sul diametro di base:

i) zero; ii) uno; iii) due; iv) **<u>tre</u>**.

3. Data una lamina omogenea piana vincolata a muoversi nel suo piano, dire quanti gradi di libertà possiede:

i) due; ii) **<u>tre</u>**; iii) quattro; iv) cinque.

4. Dato un corpo omogeneo di forma conica vincolato a muoversi con il vertice Q fisso, dire qual è la formula ottimale per il calcolo del momento della quantità di moto (G = baricentro, $\boldsymbol{\omega}$ = velocità angolare):

i) $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_G\boldsymbol{\omega}$; ii) $\underline{\boldsymbol{\sigma}_Q\boldsymbol{\omega}}$; iii) il 2° teorema di Konig; iv) QG x $M\mathbf{v}_G$.

SOLUZIONI DELL'ESERCIZIO DEL 14/07/2008

i) La lamina possiede due gradi di libertà, e dunque vi sono due equazioni pure del moto corrispondenti ai parametri lagrangiani x_A, coordinata del vertice A, e θ, angolo che il piano della lamina forma con il piano orizzontale Oxz, considerato in verso orario.

Un'equazione pura è la 1ª Equazione Cardinale della Dinamica proiettata lungo Ox:

$$m\, d^2x_A/dt^2 = -\, hx_A + A_F\,,$$

dove l'attrito A_F è dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica:

$$A_F = -\, f_d \{[mL/2\, [\cos\theta\, d^2\theta/dt^2 - \mathrm{sen}\theta\, (d\theta/dt)^2] + mg - m\cos\theta\, (dx_A/dt)\, (d\theta/dt)]^2 +$$
$$+[-\, mL/2\, [\mathrm{sen}\theta\, d^2\theta/dt^2 + \cos\theta\, (d\theta/dt)^2] + m\,\mathrm{sen}\theta\, (dx_A/dt)\, (d\theta/dt)]^2\}^{1/2}\ (\text{segno } dx_A/dt).$$

L'altra equazione pura è data dal Teorema del momento angolare assiale di asse Ax per l'asta:

$$-\, 1/3\, mL^2\, d^2\theta/dt^2 = 1/2\, mgL\cos\theta - kL^2\mathrm{sen}\theta\cos\theta.$$

ii) All'istante iniziale le reazioni vincolari sono date da:

$$\phi_{D2}(0) = 0, \quad \phi_{D3}(0) = 0, \quad \phi_{F2}(0) = mg/4, \quad \phi_{F3}(0) = -\, mu_o^2/(2L), \quad A(0) = 0.$$

iii) Le posizioni di equilibrio della lamina sono quattro per θ, mentre la legge di Coulomb-Morin per la statica fornisce i corrispondenti quattro intervalli per x_A:

$\theta_1 = \pi/2, \quad -3f_sL \le x_A \le 3f_sL,$

$\theta_2 = 3\pi/2, \quad -f_sL \le x_A \le f_sL,$

$\theta_3 = \pi/6\,, \quad -2f_sL \le x_A \le 2f_sL,$

$\theta_4 = 5\pi/6\,, \quad -2f_sL \le x_A \le 2f_sL.$

iv) Scegliendo la posizione di equilibrio $\theta_1 = \pi/2$ e $x_{A1} = 0$, si ha:

$$\phi_{D2} = -\, kL, \quad \phi_{D3} = 0, \quad \phi_{F2} = mg, \quad \phi_{F3} = 0, \quad A_F = 0.$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 09/09/2008

Esercizio (il cui punto i) è obbligatorio)
Valore domande: i) 10 punti, ii) 6 punti, iii) 8 punti, iv) 3 punti.

In un piano verticale Oxy, che trasla lungo l’asse Ox con accelerazione costante $a_\tau\mathbf{i}$, un sistema materiale è costituito da un’asta AB di lunghezza 2L, avente densità di massa nel generico punto T data da $\mu(T) = (m/2L^2)|AT|$ e vincolata nel suo punto medio all’origine O degli assi, e da un punto materiale P di massa m, vincolato a scorrere lungo l’asse verticale Oy.

Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica $k > 0$ applicata nell’estremo A dell’asta e centro il punto Q posto sul semiasse positivo Oy a distanza 2L da O;

II) una molla di costante elastica $h > 0$ collegante il punto P al baricentro G dell’asta;

III) un momento $\mathbf{M} = 8\, m\mathbf{g} \times OG'$ agente sull’asta, con G’ proiezione di G sull’asse Ox.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando il sistema è in quiete, con il punto A dell’asta sul semiasse negativo Oy ed il punto P nell’origine degli assi.

Posto, inoltre, $mg = kL = hL$ ed $a_\tau = 0$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità;

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile.

Quesiti (**ogni risposta esatta vale due punti**)

1) Dato un disco omogeneo ruotante uniformemente intorno ad un asse a lui perpendicolare e passante per un punto P del suo bordo, dire se il sistema di forze assifughe agenti è riducibile a:

i) zero; ii) **un vettore applicato**; iii) una coppia; iv) un vettore e una coppia.

2) Dato un settore circolare omogeneo piano di apertura angolare α, dire quanti assi centrali d’inerzia si conoscono a priori:

i) zero; ii) uno; iii) due; iv) **tre**.

3) Dato un sistema costituito da un cono omogeneo vincolato con il proprio vertice V a muoversi senza attrito su di una superficie emisferica con la concavità rivolta verso il basso, dire quante componenti hanno le relative reazioni vincolari:

i) zero; ii) **una**; iii) due; iv) tre.

4) Dato un punto P vincolato a muoversi su una circonferenza il cui piano di appartenenza ruota uniformemente intorno ad una asse tangente ad un punto Q del suo bordo, dire qual è l’equazione pura del moto (EDP = Equazione della Dinamica del Punto):

i) l’EDP; ii) **l’EDP proiettata sulla tangente alla circonferenza in P**;

iii) l’EDP proiettata sull’asse di rotazione; iv) il teorema del momento angolare assiale.

SOLUZIONI DELL'ESERCIZIO DEL 09/09/2008

i) Le coordinate lagrangiane sono due, corrispondenti ai gradi di libertà del sistema: y_P per il punto e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse Ox in verso antiorario. La 1ª equazione pura si ottiene dalla 2ª legge di Newton per il punto proiettata lungo l'asse Oy:

$$m\, d^2y_P/dt^2 = -\, mg + hL\text{sen}\theta\, /3 - hy_P\ .$$

La 2ª equazione pura si ottiene dalla 2ª Equazione Cardinale della Dinamica per l'asta con polo in O, proiettata lungo l'asse Oz:

$$mL^2\, d^2\theta/dt^2\, /3 = -\, mgL\cos\theta\, /3 + hLy_p\cos\theta\, /3 - 2kL^2\cos\theta + mLa_\tau\text{sen}\theta\, /3 + 8mgL\, \cos\theta\, /3.$$

ii) All'istante iniziale le reazioni vincolari sono date da:

$$\phi_{O1}(0) = 2ma_\tau /3,\ \ \phi_{O2}(0) = mg + hL/3 - 3kL,\ \ \ \phi_{O3}(0) = \phi_{B3}(0) = \phi_{P3}(0) = 0,\ \ \ \phi_{P1}(0) = ma_\tau\ .$$

iii) Poiché il sistema di forze agenti è conservativo e giroscopico ed i vincoli sono perfetti, applicando il teorema di Dirichlet si trovano 4 posizioni di equilibrio per θ ed y_p e, poiché $H_{11} = -\, h$ è costante e < 0, per ogni θ ed y_p , basta verificare se il determinante Hessiano e positivo per stabilire quali sono stabili: si ha

$\theta_1 = 0,\ \ y_{p1} = -L$ ➔ $|H\ (0, -L)| < 0$ e la posizione di equilibrio è instabile,
$\theta_2 = \pi,\ \ y_{p2} = -L$ ➔ $|H\ (\pi, -L)| < 0$ e la posizione di equilibrio è instabile,
$\theta_3 = \pi/2\ ,\ \ y_{p3} = -2L/3$ ➔ $|H\ (\pi/2, -2L/3)| > 0$ e la posizione di equilibrio è stabile,
$\theta_4 = 3\pi/2\ ,\ \ y_{p4} = -4L/3$ ➔ $|H\ (3\pi/2, -4L/3)| > 0$ e la posizione di equilibrio è stabile.

iv) Scegliendo, dunque, la posizione di equilibrio stabile $\theta_3 = \pi/2$ e $y_{P3} = -\, 2L/3$, si ha:

$$\phi_{O1} = 0,\quad \phi_{O2} = mg + 4kL,\quad \phi_{O3} = \phi_{B3} = \phi_{P1} = \phi_{P3} = 0\ .$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 12/12/2008

Esercizio (il cui punto i) è obbligatorio)
Valore domande: i) 10 punti, ii) 6 punti, iii) 5 punti, iv) 4 punti.

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un disco omogeneo di massa 2m e raggio R, che rotola senza strisciare lungo l’asse orizzontale Ox, e da un punto materiale di massa m saldato in un punto P del suo bordo. Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica $k > 0$ applicata nel baricentro G del disco e centro il punto Q posto sul semiasse positivo Oy a distanza R da O;

II) una forza costante $\mathbf{F} = \beta\mathbf{k}$ applicata nel punto P, con $\mathbf{k}$ versore dell’asse Oz;

III) un momento $\mathbf{M} = (OH + PG) \times m\mathbf{g}$ agente sul disco, dove H è il punto di contatto tra disco e asse Ox e $\mathbf{g}$ l’accelerazione di gravità.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale;

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando il sistema si trova con P nell’origine O e $\mathbf{v}_G = u_0\,\mathbf{i}$, $u_0 > 0$ ed $\mathbf{i}$ versore dell’asse Ox.

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità;

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile.

Quesiti (**ogni risposta esatta vale due punti**)

1. In un piano Oxy, ruotante uniformemente intorno all’asse Oy, una lamina quadrata omogenea OABC è vincolata nel vertice O a ruotare intorno al terzo asse Oz. Il sistema di forze di Coriolis agenti sulla lamina è dunque riducibile a:
i) zero; ii) **<u>un vettore applicato</u>**; iii) una coppia; iv) un vettore e una coppia.

2. Data un’asta omogenea di lunghezza L che si muove con gli estremi vincolati ad una circonferenza fissa di raggio 2L, dire quante componenti hanno le relative reazioni vincolari:
i) due; ii) tre; iii) **<u>quattro</u>**; iv) cinque.

3. Data una sfera omogenea di raggio R, dire quanti assi centrali d’inerzia sono anche assi principali rispetto ad un punto distante (3/2)R dal suo baricentro:
i) zero; ii) uno; iii) due; iv) **<u>tre</u>**.

4. Dato un disco omogeneo vincolato in un piano Oxy a scorrere con il baricentro lungo l’asse Oy ed a ruotare con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, dire qual’è la formula ottimale per il calcolo del momento della quantità di moto:
i) **<u>il 2° teorema di König</u>**; ii) $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_G\boldsymbol{\omega}$; iii) $OG \times M\mathbf{v}_G$; iv) $I_{Oz}\,\omega$.

SOLUZIONI DELL'ESERCIZIO DEL 12/12/2008

i) Il sistema possiede un solo grado di libertà; come parametro lagrangiano prendiamo l'angolo θ che il raggio OP del disco forma con il raggio OH, (H punto di contatto tra disco e asse Ox), preso in verso orario e supponendo che, all'istante iniziale, $\theta(t_0) = 0$.

Allora l'equazione pura si ottiene dalla 2ª Equazione Cardinale della Dinamica con polo in H, proiettata lungo l'asse Hz:

$$mR^2\, d^2\theta/dt^2\, (2\cos\theta - 5) - 2mR^2\, \mathrm{sen}\theta\, (d\theta/dt)^2 = (kR^2 - mgR)\theta.$$

ii) Le reazioni vincolari esterne all'istante iniziale sono date da:

$$\phi_{G3}(0) = \phi_{H1}(0) = \phi_{H3}(0) = 0\ ,\ \phi_{H2}(0) = m(u_0^2/R + 3g)\ ,\ \ \phi_{P3}(0) = -\beta\ ,$$

mentre il vincolo interno di saldatura in P è dato da:

$$\underline{\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{PS}}}(0) = m\,(u_0^2/R + g)\,\mathbf{j}\ .$$

iii) Poiché il sistema di forze attive agenti è conservativo e giroscopico ed i vincoli sono perfetti, il teorema di Dirichlet fornisce una sola posizione di equilibrio stabile per θ:

$$\theta_1 = 0,$$

mentre per ogni θ, con $mg = kR$, si hanno solo posizioni di equilibrio indifferente.

iv) Scegliendo la posizione $\theta_1 = 0$, allora:

$$\phi_{P3}\,(\theta_1) = -\beta,\quad \phi_{G3}(\theta_1) = \phi_{H1}(\theta_1) = \phi_{H3}(\theta_1) = 0\ ,\ \phi_{H2}(\theta_1) = 3mg,\ \underline{\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{PS}}}(\theta_1) = mg\mathbf{j}\ .$$

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 9/1/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica.

Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo.

L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, che ruota uniformemente intorno all’asse verticale Oy con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, un sistema materiale è costituito da un’asta AB di lunghezza L, avente densità di massa nel generico punto P data da $\mu(P) = (6m/L^2)\ |AP|$ e vincolata a scorrere con attrito con l’estremo A sull’asse orizzontale Ox.

Sul sistema agiscono:

I) una molla, di costante elastica h positiva, applicata nell’estremo B dell’asta e centro O;

II) un momento, dovuto ad una coppia di forze, $\mathbf{N} = -h\ (OA \times BB')$, dove B’ è la proiezione di B sull’asse Ox.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale **(11 punti)**;

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale quando l’asta si trova con l’estremo A in O e l’estremo B sul semiasse positivo orizzontale, entrambi con velocità $u_0\ \mathbf{i}$, $u_0 < 0$ ed $\mathbf{i}$ versore dell’asse orizzontale **(5 punti)**.

Posto, quindi, $h = m\omega^2 = mg/L$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale **(6 punti);**

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta **(5 punti)**.

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. In un piano π che ruota uniformemente intorno ad un suo asse Cr, un disco omogeneo è vincolato a ruotare attorno al suo centro fisso C. Dire se il sistema di forze di Coriolis è riducibile a:
i) zero; ii) un vettore applicato; iii) **una coppia**; iv) un vettore e una coppia.

2. Data una lamina rettangolare la cui densità di massa è proporzionale alla distanza del generico punto da uno dei due lati minori, dire quanti assi centrali d’inerzia si conoscono a priori:
i) zero; ii) uno; iii) due; iv) **tre**.

3. L’equazione del moto per un oscillatore armonico uni-dimensionale lungo u, di massa m e costante elastica k è:
i) $\mathbf{m\ddot{u} = -k\,u}$; ii) $m\ddot{u} = k\,u$; iii) $m\ddot{u} = k$; iv) $m\ddot{u} = 0$.

4. Per un corpo rigido in moto con l’asse scorrevole As, la formula ottimale per il calcolo dell’energia cinetica è (G è il baricentro ed $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare):
i) il 2° teorema di König; ii) il 3° teorema di König; iii) $\frac{1}{2} Mv_G^2$; iv) $\boldsymbol{\frac{1}{2} Mv_A^2 + \frac{1}{2} I_{As}\,\omega^2}$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

SOLUZIONI DEI QUESITI A RISPOSTA APERTA DEL 09/01/2009

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani, coordinata x_A del punto A ed angolo θ formato dall'asta con l'asse Ox in verso antiorario.
Una è la prima Equazione Cardinale della Dinamica proiettata lungo Ox:

$$3m\, d^2x_A/dt^2 – 2mL\, [\mathrm{sen}\theta\, d^2\theta/dt^2 + \cos\theta\, (d\theta/dt)^2] = - hx_A - hL\cos\theta + 3m\omega^2\, (x_A+ 2L\cos\theta/3) + A_A,$$

dove l'attrito A_A è dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica:

$$A_A = -f_d\{[2mL[-\cos\theta\, d^2\theta/dt^2 + \mathrm{sen}\theta(d\theta/dt)^2] + 3mg - hL\mathrm{sen}\theta]^2 + \\ +[4m\omega L\, \mathrm{sen}\theta\, (d\theta/dt) - 6m\omega\, dx_A/dt]^2\}^{1/2} \text{ (segno di } dx_A/dt).$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Az:

$$2mL\mathrm{sen}\theta\, d^2x_A/dt - 3/2\, mL^2\, d^2\theta/dt^2 = - 2mgL\cos\theta + 6m\omega^2\, \mathrm{sen}\theta\, (Lx_A/3+ L^2\cos\theta/4) - 2\, hLx_A\mathrm{sen}\theta\, .$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all'istante iniziale sono:

$$\phi_{A2}(0) = mg/3,\ \ \phi_{A3}(0) = - 6m\omega u_0\, ,\ A_A = mf_d\, [\, g^2/9 + 36\, \omega^2\, u_0{}^2\,]^{1/2}\, ,\ \ \phi_{B3}(0) = - 4m\omega u_0\, ;$$

se il vincolo rotazionale è realizzato con un momento: $\Psi(0) = 4mL\omega u_0$.

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale sono due per θ, con x_A dato dalla legge di Coulomb-Morin per la statica:

$$\theta_1 = \pi/2 \quad \text{e} \quad - f_sL \le x_{A1} \le f_sL,$$

$$\theta_2 = 3\pi/2 \quad \text{e} \quad - 2f_sL \le x_{A2} \le 2f_sL.$$

iv) Per calcolare le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio scelgo dunque la posizione $\theta = \pi/2$ e $x_A = 0$, allora

$$A_A(\pi/2,0) = 0,\ \phi_{A2}(\pi/2,0) = 2hL,\ \phi_{A3}(\pi/2,0) = 0,\ \ \phi_{B3}(0) = 0\ ;$$

se il vincolo rotazionale è realizzato con un momento: $\Psi(\pi/2, 0) = 0$.

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 24/3/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica.

Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo.

L’esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

Un sistema materiale è costituito da una lamina quadrata omogenea OABC di massa 2m e lato L, vincolata a ruotare col lato OA intorno all’asse verticale liscio Oy, e da un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi con attrito su una circonferenza di centro O e raggio L, giacente nel piano verticale Oxy. Sul sistema agiscono:

I) una molla di costante elastica h > 0 collegante il punto P con il vertice libero B della lamina;

II) un momento **M** = 2hL (OC x **i**), con **i** versore dell’asse Ox.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; (**10 punti**)

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema in P ed A all’istante iniziale quando il punto materiale P si trova in quiete sul semiasse positivo Oy, mentre la lamina è disposta lungo il semiasse positivo Oz con l’estremo B avente velocità $\mathbf{v}_B = u_0\,\mathbf{i}$, $u_0 > 0$; (**4 punti**)

Posto, quindi, mg/L = h ed $f_s = 3^{-1/2}$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale; (**7 punti**)

{per la soluzione occorrono le formule trigonometriche: tg (a/2) = [± sen a / (1+cos a)] e cotg (a/2) = [± sen a / (1-cos a)]}

iv) tutte le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio a scelta. (**4 punti**)

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. In un piano Oxy che ruota uniformemente attorno all’asse Oy, un’asta omogenea è saldata nel punto medio O all’asse Oy stessa con un inclinazione fissa di $\pi/4$. Il sistema di forze assifughe agenti sull’asta è dunque riducibile a:
i) zero ii) un vettore applicato iii) **una coppia** iv) un vettore e una coppia.

2. Data un asta vincolata a muoversi in un piano con un estremo su una curva fissa, dire qual è il numero minimo di componenti delle reazioni vincolari necessarie a realizzare i vincoli:
i) due ii) **tre** iii) quattro iv) cinque.

3. Data un’asta omogenea di lunghezza L, dire quanti assi centrali di inerzia sono anche assi principali rispetto ad un punto P, non allineato all’asta, posto a distanza D da un suo estremo:
i) zero ii) **uno** iii) due iv) tre.

4. Dato un corpo rigido con punto fisso C e baricentro G, la formula ottimale per esprimere il momento della quantità di moto è data da:
i) il secondo teorema di Koenig ii) CG x $M\mathbf{v}_C$ iii) $\underline{\sigma}_C\boldsymbol{\omega}$ iv) CG x $M\mathbf{v}_G + \underline{\sigma}_G\boldsymbol{\omega}$.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria
Facoltà d’Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 24/03/2009

SOLUZIONI

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani: l’angolo θ che il piano della lamina forma con il piano Oyz, e l’angolo α che il vettore OP forma con l’asse Ox, ambedue in verso antiorario.
Una è la seconda legge di Newton per il punto P proiettata lungo la tangente alla circonferenza in P:

$$mL\, d^2\alpha/dt^2 = - mg\cos\alpha - hL\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\alpha + hL\cos\alpha + A,$$

dove l’attrito A è dato dalla legge di Coulomb-Morin per la dinamica:

$$A = -f_d\{[mL\,(d\alpha/dt)^2 - mg\,\mathrm{sen}\alpha + hL\,\mathrm{sen}\theta\cos\alpha + hL\,\mathrm{sen}\alpha - hL\,]^2 + \\ +[-hL\cos\theta]^2\}^{1/2}\ (\text{segno di } v_P).$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Oy per la lamina:

$$2/3\ mL^2\, d^2\theta/dt^2 = hL^2\cos\theta\,\cos\alpha + 2hL^2\cos\theta.$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all’istante iniziale sono:

$$\phi_{Pn}(0) = -mg,\ \ \phi_{Pb}(0) = -\,hL\ ,\ A(0) = 0,\ \phi_{A1}(0) = 3/2\ hL,\ ,\ \phi_{A3}(0) = hL - mg - ½\ m\,u_0^2/L$$
$$(\phi_{O1}(0) = 3hL/2\ ,\ \phi_{O2}(0) = 2mg,\ \phi_{O3}(0) = mg - m\,u_0^2/(2L).$$

iii) Le posizioni di equilibrio del sistema materiale sono due per θ, con α dato dalla legge di Coulomb-Morin per la statica facendo uso delle formule di bisezione tg $\alpha/2 = {}^{+/-}\,\mathrm{sen}\alpha/(1 + \cos\alpha)$ e ctg $\alpha/2 = {}^{+/-}\,\mathrm{sen}\alpha/(1 - \cos\alpha)$:

$$\theta_1 = \pi/2 \quad \text{e} \quad -\,2\pi/3 \le \alpha \le 2\pi/3,$$

$$\theta_2 = 3\pi/2 \quad \text{e} \quad -\,\pi/3 \le \alpha \le \pi/3.$$

iv) Per calcolare le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio scelgo dunque la posizione $\theta = \pi/2$ e $\alpha = 0$:

$$\phi_{Pn} = \phi_{Pb} = 0\ ,\ A(0) = 0,\ \phi_{A1} = -2hL,\ ,\ \phi_{A3} = 0,\ \phi_{O1} = -3hL/2,\ \phi_{O2} = 3hL,\ \phi_{O3} = 0.$$

Università degli Studi "**Mediterranea**" di Reggio Calabria
Facoltà d'Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 07/04/2009

La prova consta di 4 Quesiti a risposta chiusa e 4 Quesiti a risposta aperta; la durata della prova è di 2 ore e 30 minuti. Non è permesso consultare testi od appunti, al di fuori del manabile di Matematica. Per i quesiti a risposta chiusa, la risposta a ciascuno di essi va scelta esclusivamente tra quelle già date nel testo, con una X sul numeretto relativo. Una sola è la risposta corretta; qualora sia data più di una risposta allo stesso quesito, nessuna sarà considerata valida. Per i quesiti a risposta aperta, il cui punto i) è obbligatorio, lo studente dovrà ricavare ed indicare la risposta nei due fogli a quadretti allegati. I punteggi per ciascun quesito sono dichiarati sul testo. L'esito finale della prova è determinato dalla somma algebrica dei punteggi parziali.

Quesiti a risposta aperta

In un piano verticale Oxy, un sistema materiale è costituito da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza L, vincolata a traslare con il vertice A sull'asse orizzontale Ox. Una molla di costante elastica $h > 0$ collega l'origine O al vertice A, mentre una molla di costante elastica $k > 0$ collega il vertice B al punto mobile B' proiezione di B sull'asse Ox. Sul sistema, inoltre, agiscono:

I) una forza $\mathbf{F} = \beta\, \mathbf{k}$ applicata nel baricentro G, con $\beta > 0$ e $\mathbf{k}$ versore del terzo asse;

II) un momento $\mathbf{M} = (m\mathbf{g} \times AB)$, con $\mathbf{g}$ vettore accelerazione di gravità.

Determinare:

i) la, o le, equazioni pure del moto del sistema materiale; (**10 punti**)

ii) le reazioni vincolari agenti sul sistema all'istante iniziale quando l'asta è allineata al semiasse positivo Ox con A situato a distanza L da O, $v_A(0) = u_0\,\mathbf{i}$ e $v_B(0) = u_0\,\mathbf{i} + v_0\,\mathbf{j}$, $u_0 > 0$ e $v_0 < 0$; (**4 punti**)

Posto, quindi, $mg/L = h = k$, determinare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; (**7 punti**)

iv) le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile a scelta. (**4 punti**)

Quesiti a risposta chiusa del valore di due punti ciascuno

1. Dato un sistema di vettori applicati riducibile ad una sola coppia, i vettori caratteristici del sistema sono dati da:

i) $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$; ii) **$\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$**; iii) $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{M}_O = 0$; iv) $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$.

2. Data una circonferenza omogenea, dire quanti assi centrali d'inerzia sono anche assi principali rispetto ad un punto della retta s ortogonale ad essa e passante per l'estremo di un suo diametro:

i) nessuno ii) **uno** iii) due iv) tre

3. Dato un sistema materiale formato da due aste omogenee di lunghezza L, in cui un estremo della prima è saldato ad un un estremo dell'altra, dire quanti gradi di libertà possiede:

i) dieci; ii) quattro; iii) **sei**; iv) otto.

4. Data una lamina quadrata omogenea vincolata a muoversi con punto fisso C, individuare la o le equazioni pure del moto (ECD = Equazione Cardinale della Dinamica):

i) la 1ª ECD proiettata lungo Ox; ii) la 1ª ECD proiettata lungo i tre assi;
iii) la 2ª ECD con polo in C proiettata lungo Ox; iv) **la 2ª ECD con polo in C**.

Ai sensi del D. Lgs. 30/06/2003, n. 196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell'esito della prova.

COGNOME: NOME: NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA: FIRMA:

Università degli Studi "**Mediterranea**" di Reggio Calabria
Facoltà d'Ingegneria – **Meccanica Razionale**
Anno Accademico 2007/2008 – Appello del 7/04/2009

SOLUZIONI DEI QUESITI A RISPOSTA APERTA DEL 07/04/2009

i) Vi sono due equazioni pure relative ai due parametri lagrangiani: l'angolo θ che l'asta forma con l'asse Ox preso in verso antiorario, e la coordinata x_A del vertice A dell'asta che trasla lungo l'asse Ox.

Una è la prima equazione cardinale della dinamica proiettata lungo l'asse Ox:

$$-1/2\ mL[d^2\theta/dt^2\ \mathrm{sen}\theta + (d\theta/dt)^2 \cos\theta] + d^2x_A/dt^2 = -\ hx_A$$

La seconda equazione pura è il Teorema del momento angolare assiale di asse Az per l'asta:

$$1/3\ mL^2\ d^2\theta/dt^2 - 1/2\ mL\ d^2x_A/dt^2\ \mathrm{sen}\theta = 1/2\ mgL\cos\theta - kL^2\ \mathrm{sen}\theta \cos\theta.$$

ii) Le reazioni vincolari agenti sul sistema all'istante iniziale sono:

$$\phi_{A2}(0) = 7/4\ mg,\quad \phi_{A3}(0) = -\ \beta/2\ ,\ \phi_{B3}(0) = -\ \beta/2$$

(nel caso in cui si realizzi il vincolo di rotazione per l'asta con una coppia ψ_B,

$$\phi_{A3}(0) = -\ \beta,\ \psi_B(0) = \beta L/2)$$

iii) Poiché il sistema di forze agenti è conservativo, applicando il teorema di Dirichlet si trova una posizione di equilibrio per x_A e quattro per θ:

$$x_A = 0,$$
con $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 3\pi/2 \rightarrow$ equilibrio instabile,
$\theta_3 = \pi/6$, $\theta_4 = 5\pi/6 \rightarrow$ equilibrio stabile.

iv) Per calcolare le reazioni vincolari agenti sul sistema in una posizione di equilibrio stabile scelgo dunque la posizione $x_{A3} = 0$ e $\theta_3 = \pi/6$:

$$\phi_{A2}(0) = 3kL/2,\quad \phi_{A3}(0) = -\ \beta/2\ ,\ \phi_{B3}(0) = -\ \beta/2$$

(nel caso in cui si realizzi il vincolo di rotazione per l'asta con una coppia,

$$\phi_{A3}(0) = -\ \beta,\ \psi_B(0) = \beta L/2)$$