VETTORI E MATRICI

Definizione 1 *Chiamiamo* **vettore** $\mathbf{x}$ *una* **n-pla ordinata di numeri reali**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

L'insieme di tutti i vettori con *n componenti reali* si indica con $\mathbb{R}^n$.I numeri reali si possono pensare con vettori ad un'unica componente. Vettori con 1,2,3 componenti possono essere rappresentati gemetricamente nel piano, ripettivamente su un asse, in un piano xy o nello spazio cartesiano a tre dimensioni. (rappresentazione...)

Tra gli infiniti vettori di $\mathbb{R}^n$ ce ne sono n di particolare importanza detti *vettori fondamentali* e indicati con i simboli $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n$. Ogni vettore $\mathbf{e}^i$ con $i = 1, 2, ..., n$ ha tutte le componenti nulle tranne la $i - esima$, che è unitaria. Esempio: i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OPERAZIONI TRA VETTORI

- *Uguaglianza.* Due vettori si dicono *uguali* cioè $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se per $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ valgono le *n* uguaglianze

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad ..., \quad x_n = y_n$$

La relazione di uguaglianza tra vettori gode delle tre proprietà caratteristiche dell'uguaglianza tra numeri:

proprietà riflessiva	$\mathbf{x} = \mathbf{x}$
proprietà simmetria	se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, allora $\mathbf{y} = \mathbf{x}$
proprietà transitiva	se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, allora $\mathbf{x} = \mathbf{z}$

Quando $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ i due vettori non sono uguali.

- *Ordinamento.* $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ se e solo se $x_s > y_s \quad \forall s = 1, ..., n$ (**Ordine parziale)**

Esistono casi in cui non è possibile dare un ordinamento ai vettori perchè nè $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ nè $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ nè $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inoltre: } \begin{array}{ll} \mathbf{x} > 0 \text{ (vettore \textit{positivo})} & \text{se } x_s > 0 \ \ \forall s = 1, ..., n \\ \mathbf{x} \geqq 0 \text{ (vettore \textit{non negativo})} & \text{se } x_s \geqq 0 \ \ \forall s = 1, ..., n \end{array}$$

- *Somma.* Consideriamo due vettori di $\mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Il vettore somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è ancora un vettore di $\mathbb{R}^n$ ed è dato da $\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

Valgono le seguenti proprietà:

1. *commutativa:* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \ \forall \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;

2. *associativa:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})\ \forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$;

3. $\exists$ un vettore $\in\mathbb{R}^n$ chiamato vettore nullo e denotato con $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.

4. ogni vettore $\mathbf{x}$ ammette un suo opposto $-\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.

5. *prodotto per uno scalare:* (moltiplicazione di un vettore per un numero reale)

$$c\mathbf{x}=\mathbf{x}c=c\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}c:=\begin{bmatrix}cx_1\\cx_2\\\vdots\\cx_n\end{bmatrix}$$

Per esempio $-2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$

Proprietà:

1. *distributiva rispetto alla somma tra numeri:* $\left(c + c^{'}\right)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + c^{'}\mathbf{x}\ \forall c, c^{'} \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

2. *distributiva rispetto alla somma tra vettori:* $c\left(\mathbf{x} + \mathbf{x}^{'}\right) = c\mathbf{x} + c\mathbf{x}\ \forall c \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{x}^{'} \in \mathbb{R}^n$;

3. *associativa:* $c^{'}(c\mathbf{x}) = (c^{'}c)\mathbf{x}\ \forall c, c^{'} \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

4. *elemento neutro rispetto al prodotto scalare-vettore:* $\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Dalle proprietà elencate è possibile dedurre che:

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{x} &= 0 \text{ se e solo se } \alpha = 0 \text{ o } \mathbf{x} = 0 \\ (-\mathbf{1})\mathbf{x} &= -\mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Il vettore somma si ottiene con la regola del parallelogramma, mentre il vettore scalare-vettore $\alpha\mathbf{x}$ appartiene alla retta passante per l'origine e per il punto $\mathbf{x}$.

(rappresentazione in $\mathbb{R}^2$)

Definizione 2 *Siano* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k$ *vettori di* $\mathbb{R}^n$ *e siano* $c_1, c_2, ..., c_k$ *numeri reali. Il vettore*

$$\mathbf{x} = \sum_{s=1}^{k} c_s \mathbf{x}^s = c_1 \mathbf{x}^1 + c_2 \mathbf{x}^2 + ... + c_k \mathbf{x}^k$$

si dice **combinazione lineare** *dei vettori* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k$ *con* **coefficienti (pesi)** $c_1, c_2, ..., c_k$.

Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -12 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare dei vettori fondamentali $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n$

e i coefficienti della combinazione lineare sono le componenti di $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \sum_{s=1}^{n} x_s \mathbf{e}^s$$

- *Combinazione lineare convessa:* Quando una combinazione lineare $\sum_{s=1}^{k} c_s \mathbf{x}^s = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + ... + c_k\mathbf{x}^k$ ha tutti i suoi coefficienti non negativi e che sommano a 1, $c_s \geqq 0$ e $c_1 + c_2 + ... + c_k = 1$.

Combinazioni lineari convesse di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ nel piano

$$\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{y}, \quad \alpha \in [0,1]$$

(rappresentazione...)

Definizione 3 *Dati due vettori* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, *il numero*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{s=1}^{n} x_s y_s$$

si chiama **prodotto interno o prodotto scalare** *di* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.

Se $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ allora $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) = 8$.

Per indicare il prodotto interno si può usare anche uno dei simboli $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$.

Proprietà del prodotto interno:

1. *commutativa:* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$

2. *distributiva rispetto all'addizione tra vettori:* $(\mathbf{x}+\mathbf{x}', \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})+(\mathbf{x}', \mathbf{y})$

3. *omogeneità (rispetto ad entrambi i fattori):* $(h\mathbf{x}, k\mathbf{y}) = h(\mathbf{x}, k\mathbf{y}) = hk(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

4. *non negatività:* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqq 0$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = 0$

Il prodotto interno di due vettori può annullarsi anche se entrambi i vettori non sono nulli.

Esempio $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ si ha $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 + (-1) = 0$. Geometricamente i due vettori sono *ortogonali.*

Modulo e distanza

Il *modulo* o *norma* del vettore $\mathbf{x}$ che indichiamo con $|\mathbf{x}|$ coincide rappresenta la lunghezza di un vettore che coincide con la *distanza* del punto $\mathbf{x}$ dall'origine $\mathbf{0}$ (teorema di Pitagora nel caso bi e tridimensionale)

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2} = |x_1| \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{cases}$$

Definizione 4 *Il modulo o norma (euclidea) di un vettore* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *è definito dalla formula*

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} x_s^2}$$

Esempio: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ allora $|\mathbf{x}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

Proprietà del modulo:

1. $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{x}| \geqq 0$ ed è *nullo se e solo se* $\mathbf{x} = 0$;

2. $|c\mathbf{x}| = |c| \cdot |\mathbf{x}|\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall c \in \mathbb{R}$;

3. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|\ \ \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare).

Definizione 5 *La* **distanza** *(euclidea)* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *tra due vettori* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *è*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (x_s - y_s)^2}$$

Oss. Se consideriamo due numeri x, y o due puni che li rappresentano su un asse cartesiano la loro distanza è $|x - y|$; con vettori bi o tridimensionali avremo rispettivamente

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sqrt{\sum (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sqrt{\sum_{s=1}^{3} (x_s - y_s)^2} \end{aligned}$$

Definizione 6 *k vettori* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ *sono* **linearmente dipendenti** *quando uno almeno di essi può essere espresso come combinazione lineari degli altri. In caso contrario si dicono* **linearmente indipendenti.**

Supponiamo che sia l'ultimo vettore a essere combinazione lineare degli altri, per cui esistono $k-1$ scalari $c_1, c_2, ..., c_{k-1}$ tali che

$$\mathbf{x}^k = \sum_{s}^{k-1} c_s \mathbf{x}^s$$

Esempio... dati i tre vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dimostrare che il terso è combinazione lineare degli altri due.

Teorema 7 *I vettori* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ *sono linearmente dipendenti se e solo se esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, ossia*

$$\sum_{s}^{k} c_s \mathbf{x}^s = \mathbf{0}$$

con almeno un coefficiente c_s *diverso da zero. I vettori* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ *sono linearmente indipendenti se e solo se tutti i coefficienti sono nulli.*

1. Se un insieme di vettori contiene il vettore nullo, questi sono sicuramente linearmenti dipendenti.

2. Due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se hanno le componenti proporzionali (uno multiplo dell'altro).

3. Dato un insieme di vettori linearmente dipendenti è possibile scrivere uno di essi come combinazione lineare dei rimanenti.Ciò non significa che è possibile scrivere ciascuno dei vettori come combinazione lineare degli altri.

Esempio.... $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il primo può essere espresso come combinazione degli altri due, mentre non siste nessuna combinazione lineare dei primi due che produca il terzo.

MATRICI

Definizione 8 *Siano m, n due interi positivi. Si chiama* **matrice reale del tipo** (m, n) *o $m \times n$, una tabella ordinata di $m \cdot n$ numeri reali*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dove m rappresenta il numero delle righe e n il numero delle colonne.

Se $m \neq n$ la matrice si dice *rettangolare; se $m = n$* la matrice sarà *quadrata (n ordine* della matrice). Gli elementi contraddistinti da indici uguali in una matrice quadrata $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formano la *diagonale principale.* Mentre due elementi a_{ik} e a_{ki} con $i = 1, ..., n$ e $k = 1, ..., n$ che hanno gli stessi indici ma in ordine inverso, si dicono *coniugati* e i loro posti sono *simmetrici* rispetto alla diagonale principale.

Se gli elementi coniugati sono tra loro uguali cioè $a_{ik} = a_{ki}$ allora la matrice si dice $simmetrica$.

Una matrice quadrata di ordine n della forma

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

si chiama *matrice diagonale. Se* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$ allora $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_n$ *matrice identità (o unità).*

- Una matrice si dice *nulla* se ha nulli tutti i suoi elementi: $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

- Due matrici si dicono dello *stesso tipo* se hanno lo stesso numero di righe e colonne

- In due matrici dello stesso tipo gli elementi di egual posto si dicono *corrispondenti*

- Due matrici dello stesso tipo si dicono *uguali*, quando sono tali tutti gli elementi corrispondenti $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Proprietà dell'uguaglianza: *riflessiva, simmetrica, transitiva.*

- I vettori sono particolari matrici. Un vettore colonna è una matrice $m \times \mathbf{1}$, mentre il vettore riga è una matrice $\mathbf{1} \times n$.

Trasposizione. Data una matrice $\mathbf{A}$ $m \times n$. Se scambiamo le righe con le colonne otteniamo una matrice di tipo $n \times m$ che si dice *matrice trasposta* della matrice $\mathbf{A}$ e si indica con $\mathbf{A}^T$.

Esempio:

se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ allora $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$.

Sottomatrici. Sopprimendo $m-p$ righe e $n-r$ colonne in una matrice $\mathbf{A}$ di tipo $m \times n$ si opptiene una *sottomatrice* $p \times r$.

Esempio: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

OPERAZIONI TRA MATRICI

Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare

La somma di matrici e la moltiplicazione per uno scalare sono definite come per i vettori.

- *Somma (tra matrici dello stesso tipo) gode delle stesse proprietà della somma tra vettori (associativa, commutativa, elemento neutro, esistenza matrice opposta).*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+3 & -3+8 & 4+0 \\ 2+4 & -1-2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Prodotto per uno scalare gode delle stesse proprietà della prodotto di un vettore per uno scalare (associativa, distributive, elemento neutro).*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
-3\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -3\cdot 1 & -3\cdot(-3) & -3\cdot 4 \\ -3\cdot 2 & -3\cdot(-1) & -3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -12 \\ -6 & 3 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Prodotto tra matrici

Il prodotto tra matrici comunemente usato è il prodotto *righe per colonne:* il numero delle colonne della prima matrice deve essere uguale al numero delle righe della seconda ($\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono *conformabili).* Siano $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$ e $\mathbf{B}$ una matrice $n \times p$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ ... \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{a}^1, ..., \mathbf{a}^m$ sono i vettori riga della matrice $\mathbf{A}$ e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & .. & b_{1p} \\ b_{21} & a_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{b2} & ... & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & ... & \mathbf{b}^p \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{b}^1, ..., \mathbf{b}^p$ sono i vettori colonna della matrice $\mathbf{B}$.

Il loro prodotto $\mathbf{AB}$ è la matrice $\mathbf{C}$ $m \times p$ in cui il suo generico elemento c_{ik} è dato dal prodotto scalare del vettore riga $\mathbf{a}^i$ con il vettore colonna $\mathbf{b}^k$

$$c_{ik} = \mathbf{a}^i \mathbf{b}^k = a_{i1}b_{1k} + a_{i1}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$c_{11} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 7; c_{12} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -2;$

$c_{21} = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 11; c_{22} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = -3;$

$c_{31} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -3; c_{32} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 11 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Altri esercizi....

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proprietà del prodotto

1. *Proprietà associativa:* $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

2. *Proprietà distributiva a sinistra e a destra rispetto all'addizione:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} \quad \text{e} \quad (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$$

3. *Prodotto e trasposizione:* $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

4. *Elemento neutro rispetto alla moltiplicazione tra matrici:* $\mathbf{A}$ matrice conformabile a $\mathbf{I}_n$ allora

$$\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$$

Osservazione 9 *La moltiplicazione tra matrici* **non** *gode della proprietà* **commutativa**!! *Se* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *allora le due matrici si commutano.*

Osservazione 10 *Non vale la legge di annullamento del prodotto: anche se* $\mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}$, *non è detto che se* $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ *o* $\mathbf{A}$ *o* $\mathbf{B}$ *debba essere la matrice nulla. Esempio*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$$

Se il prodotto di due matrici è la matrice nulla allora i vettori riga della prima matrice sono ortogonali ai vettori colonna della seconda.

Potenze di una matrice. Per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di ordine n si possono define le potenze intere positive

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A};\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A};\ \ \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}}_{k \text{ volte}}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

MATRICE INVERSA

E' possibile invertire una matrice?

Osservazione 11 *Un numero b è inverso di un numero $a \neq 0$ se $ab = ba = 1$*

Dato che non sempre esistono i prodotti $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ e potrebbero essere diversi$\longrightarrow$ *matrici quadrate dello stesso ordine.*

Definizione 12 *Data una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di ordine n, si dice che $\mathbf{B}$ è inversa di $\mathbf{A}$ se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.*

Osservazione 13 *Se* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *sono inverse della stessa matrice* $\mathbf{A}$ *allora* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$*.*
La matrice inversa se esiste è **unica.**

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n \ \ \textit{e}\ \mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B(AC)} = \mathbf{(BA)C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = \mathbf{C}$$

Se l'inversa della matrice $\mathbf{A}$ esiste si dice che $\mathbf{A}$ è invertibile e si scrive $\mathbf{A}^{-1}$.

Se una matrice non è invertibile si dice *singolare.*

....

IL DETERMINANTE

Consideriamo due vettori di $\mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$. Essi sono linearmente dipendenti se le componenti sono proporzionali, $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $a = kc$ e $b = kd$

$$\rightarrow ad - bc = 0$$

Il numero $ad - bc$ si chiama **determinante** della matrice,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e si indica con $\det \mathbf{A}$ o $|\mathbf{A}|$. I due vettori quindi sono linearmente dipendenti se e solo se il determinante della matrice $\mathbf{A}$ è *nullo.*

Significato geometrico del modulo del determinante$\rightarrow$*area del parallelogramma individuato dai vettori* $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$....

Determinanti

Consideriamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definizione 14 *Fissato un elemento a_{ik} nella matrice $\mathbf{A}$, e soppressa la riga e la colonna che in esso si incrociano, (i-esima riga e k-esima colonna), si ottiene una matrice quadrta di ordine $n-1$, il cui determinante si chiama* **minore complementare** *dell'elemento a_{ik} e verrà indicato con M_{ik}.*

Definizione 15 *L'elemento a_{ik} si dice pari o dispari a seconda che $i+k$ sia pari o dispari.*

Definizione 16 *Si chiamo* **complemento algebrico** *dell'elemento* $a_{ik} \rightarrow A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Esempio.

Nella matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

i complementi algebrici degli elementi a_{22} e a_{21} sono

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ e } A_{22} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Definizione 17 *(Sviluppo di Laplace) Il* **determinante** *di una matrice quadrata* $\mathbf{A}$ *di ordine n è la somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi della matrice per i loro complementi algebrici. in particolare per la i-esima riga*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

e per la k-esima colonna

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

Osservazione 18 *Per le matrice quadrate di ordine 2 il* $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Osservazione 19 *Per le matrici quadrate di ordine 3*$\longrightarrow$ *regola di Sarrus....*

Proprietà dei determinanti

1. *Il determinante della trasposta di una matrice quadrata è uguale al determinante della matrice stessa* $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$

2. *Per una matrice triangolare e in particolare diagobale il determinante è il prodotto degli elementi della diagonale principale* $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

3. *Se si moltiplica una linea per una costante k, il valore del determinante risulta moltiplicato per k.*

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. *Se in un determinante si scambiano fra loro due linee parallele il suo valore cambia di segno.*

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

5. *Se in una matrice quadrata due linee parallele sono proporzionali o uguali il determinante è uguale zero.*

6. *Se in un determinante una linea è somma di due addendi*

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a + a')d - (b + b')c = ad - bc + a'd - b'c =$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

7. (**Teorema di Binet**) *Il determinante della matrice* $\mathbf{AB}$, prodotto di due matrici quadrate, è uguale al prodotto dei determinanti

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 29 & -6 \\ 17 & -2 & 7 \\ -20 & 15 & -2 \end{bmatrix}, \det \mathbf{A} = -47, \det \mathbf{B} = 95, \det \mathbf{C} = -4465$$

MATRICE INVERSA

Sia $\mathbf{A} = [a_{ik}]$. Indichiamo con A^* la matrice dei complementi algebrici di a_{ik}

$$A^* = [A_{ik}]$$

e chiamiamo **aggiunta** di $\mathbf{A}$ la matrice $[A^*]^T$.

Teorema 20 *Una matrice $\mathbf{A}$ è invertibile se e solo se* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *In tal caso la matrice inversa è assegnata dalla formula*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [A^*]^T$$

Segue che (per il teorema di Binet)

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$$

Esempi

RANGO O CARATTERISTICA DI UNA MATRICE

Sia $\mathbf{A}$ una matrice $m \times n$. Fissiamo un $p \leq \min(m, n)$, si chiama **minore** di ordine p estratto da $\mathbf{A}$, il determinante di una sottomatrice quadrata di ordine p.

Definizione 21 *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice* $m \times n$. *Si chiama* **rango** *di* $\mathbf{A}$, *i cui elementi non siano tutti nulli, l'ordine massimo dei suoi minori non nulli. In altre parole, si dice che il numero naturale* $r \geqq 0$ *è il rango della matrice* $\mathbf{A}$, $r = r(\mathbf{A})$, *se*

1. dalla matrice $\mathbf{A}$ si può estrarre *almeno* un minore di ordine r non nullo;

2. tutti gli eventuali minori d'ordine maggiore di r sono nulli.

Esempio 1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ essendo $\det \mathbf{A} = 0$ consideriamo il minore di ordine 2 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ allora $r(\mathbf{A}) = 2$

Esempio 2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ i minori del 3° ordine che si possono estrarre sono

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

sono tutti nulli perche gli elementi della prima e terza riga sono proporzionali.

Prendendo il minore di ordine 2 $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \to r(\mathbf{A}) = 2$

Per calcolare il rango non occorre considerare in realtà *tutti* i minori di una matrice.

Teorema 22 (Kronecker) *Se la matrice* $\mathbf{A}$ $m \times n$ *possiede un minore di ordine* r *non nullo e tutti i minori di ordine* $r+1$ *che si ottengono "orlando" tale minore con una riga e una colonna qualsiasi si* $\mathbf{A}$ *sono nulli, allora il rango di* $\mathbf{A}$ *è* r.

In pratica, si trova un minore $\mathbf{\Delta}$ di ordine r non nullo; si calcolano i minori di ordine $(r+1)$ ottenuti "orlando" il minore $\mathbf{\Delta}$:

- se tutti questi minori sono nulli, il rango della matrice è r;

- se, invece almeno uno di essi è non nullo, si ripete questo procedimento per quest'ultimo minore.

Esempio. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ Si vede subito che il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

quindi $2 \leq r(\mathbf{A}) \leq 3 = \min(3,4)$.

Consideriamo le sottomatrici di ordine 3 ottenute orlando $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det \Delta_1 = 3 \neq 0$, allora $r(\mathbf{A}) = 3$.

Osservazione 23 *Se il determinante di una matrice è non nullo, i vettori riga o colonna sono linearmente indipendenti.*

Teorema 24 *Il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di vettori riga o colonna linearmente indipendenti.*

Se r è il rango di $\mathbf{A}$ allora esiste una sottomatrice quadrata di $\mathbf{A}$ non singolare e di ordine r. I corrispondeti vettori riga o colonna devono essere indipendenti; inoltre ogni altro vettore riga o colonna deve essere dipendente da questi altrimenti si potrebbe formare un altro minore non singolare di ordine maggiore di r, contraddicendo che $r(\mathbf{A}) = r$.

SISTEMI LINEARI

Un'equazione nelle n incognite $x_1, x_{2,}..., x_n$ si dice *lineare* se è del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

dove $a_1, a_{2,}..., a_n$ sono coefficienti reali e b il termine noto. Se $b = 0$ l'equazione si dice *omogenea.*

Un *sistema lineare* di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_{2,}..., x_n$ è quindi costituito dalle m equazioni lineari che devono essere soddisfatte simultaneamente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se tutti i b_i sono nulli il sistema si dice omogeneo.

Definizione 25 *Una* **soluzione** *del sistema è la n-pla* $x_1, x_{2,}..., x_n$ *di numeri reali che verificano simultaneamente le* m *equazioni. Se un sistema non ha soluzioni si dice* **impossibile.** *Se il sistema ha una sola soluzione si dice* **determinato**, *altrimenti se possiede infinite soluzione si dice* **indeterminato.**

Scriviamo il sistema lineare di m equazioni in n incognite come un'unica equazione del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{A}$ è la *matrice dei coefficienti* $m \times n$, $\mathbf{x}$ è il vettore *incognito* e $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Sistemi di n equazioni in n incognite

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ con } \mathbf{A}\ n \times n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

- Per $n = 1 \rightarrow ax = b$ equazione di primo grado lineare nell'incognita x. Per $a \neq 0$, $x = \dfrac{b}{a} = a^{-1}b$. Per $a = 0$ l'equazione è impossibile se $b \neq 0$ o ha infinite soluzioni se $b = 0$.

- Per $n > 1$ $\rightarrow$Se la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ è non singolare, $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, allora $\exists \mathbf{A}^{-1}$ che garantisce esistenza e unicità di soluzione del sistema lineare.

Teorema 26 (Cramer) *Sia* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *un sistema di* n *equazioni in* n *incognite. Se* $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, *il sistema ammette un'unica soluzione*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Dimostrazione 27 *Se* $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1}$ *quindi* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ *ed essendo* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ *e* $\mathbf{I}_n\mathbf{x} = \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. *L'unicità della matrice inversa garantisce l'unicità della soluzione.*

La regola di Cramer

Sia $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema di n equazioni in n incognite. Se $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, il sistema ammette un'unica soluzione data da:

$$x_1 = \frac{D_1}{\det \mathbf{A}}, x_2 = \frac{D_2}{\det \mathbf{A}}, ..., x_n = \frac{D_n}{\det \mathbf{A}}$$

dove $D_1, D_2, ..., D_n$ rappresentano i determinanti che si ottengono dal determinante $\mathbf{det\,A}$ sostituendo, rispettivamente, agli elementi della prima, seconda,...,n-ma colonna, i termini noti del sistema

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}, ...$$

Esempio

Risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -2 \\ x - 2y + 5z = -1 \\ 2x + 3y - z = 11 \end{cases}$$

essendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ segue che $\det \mathbf{A} = -42 \neq 0$. Per Cramer

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 42; D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -210;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -84$$

La soluzione unica del sistema sarà:

$$x = \frac{D_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{42}{-42} = -1, y = \frac{D_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-210}{-42} = 5, z = \frac{D_n}{\det \mathbf{A}} = \frac{-84}{-42} = 2$$

Osservazione 28 *Se* $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ *la risoluzione del sistema lineare* $n \times n$ *si riduce al calcolo di* $n + 1$ *determinanti. Se* $\det \mathbf{A} = \mathbf{0}$, *o la matrice* $\mathbf{A}$ *è rettangolare si ricorre al terorema di Rouchè-Capelli.*

Sistemi di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

il cui numero m di equazioni può essere *maggiore, uguale* o *minore* del numero n di incognite. Consideriamo le seguenti matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

chiamate rispettivamente, **matrice incompleta** (o dei coefficienti) e **matrice completa** (o matrice dei coefficienti e termini noti) del sistema.

Osservazione 29 *Il rango della matrice completa non può essere mai minore del rango della matrice incompleta perche la contiene. Quindi o il rango della matrice completa è maggiore di quello della incompleta o le due matrici hanno lo stesso rango.*

Teorema 30 (Rouchè-Capelli) *Un sistema di m equazioni lineari in n incognite è compatibile, cioè ammette soluzioni (una o infinite) se e solo se la mtrice incompleta e quella completa hanno lo stesso rango.*

- In tal caso il sistema possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = r(\mathbf{A})$.

- Se $n = r$, la matrice incompleta ha *rango pieno* e allora il sistema ammette un'unica soluzione.

Regola di risoluzione dei sistemi lineari di equazioni lineari

Dato un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ di m equazioni in n incognite, e $r(\mathbf{A}) = r$.

1. Si considerino soltanto r delle m equazioni del sistema, corrispondenti alle r righe del minore estratto da $\mathbf{A}$, trascurando le altre $m - r$ equazioni che sono qutomaticamente soddisfatte quando lo sono le prime r. Quindi consideremo solo un sistema di r equazioni in n incognite.

2. Al primo membro del nuovo sistema si mantengono le r incognite in modo che il determinante dei loro coefficienti sia diverso da zero; i termini contenenti le altre $n - r$ incognite si spostano al secondo membro e si trattano come parametri (si attribuiscono valori "arbitrari").

3. Si ottiene cosi un sistema di r equazioni in r incognite che si può risolvere con la regola di Cramer o con qualsiasi altro metodo di risoluzione per i sistemi lineari.

Esempi...

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Un sistema lineare si dice **omogeneo** se il vettore dei termini noti è il vettore nullo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ogni sistema omogeneo ha almeno una soluzione, infatti ammette sempre la soluzione nulla in accordo con il fatto che $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})$ sempre.

Esistono altre soluzioni?

Per il teorema di Rouchè-Capelli un sistema lineare in n incognite con $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})$ ammette ∞^{n-r} soluzioni.

Nel caso di un sistema omogeneo:

- se $n = r$ si ha la soluzione nulla;

- se $n > r$ esistono ∞^{n-r} soluzioni tra cui la soluzione nulla.

Osservazione 31 *Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non nulle se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle incognite. In particolare, un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite ha soluzioni non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare.*

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

essendo $\mathbf{det}\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ e $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -5 \neq 0 \to \infty^{n-r} = \infty^{3-2}$ soluzioni che si determinano risolvendo con la regola di Cramer il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = z \\ 3x + 2y = 4z \end{cases}$$

Si ha : $$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 3 \\ 4z & 2 \end{vmatrix}}{-5} = 2z; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & z \\ 3 & 4z \end{vmatrix}}{-5} = -z.$$

Quindi le ∞^1 soluzioni del sistema sono:

$$x = 2z; \quad y = -z; \quad z = z \text{ (arbitrario: 1 variabile libera)}$$

Per $z = 0$ si ha la soluzione *nulla.*