Un caso particolare di funzioni: le successioni

Una **successione** è una funzione definita nell'insieme N dei numeri naturali.

ESEMPIO

La successione costituita dai cubi dei numeri naturali è una funzione che associa ad ogni numero naturale il suo cubo.

$$N \to R$$

$$0 \to a_0 = 0^3 = 0$$

$$1 \to a_1 = 1^3 = 1$$

$$2 \to a_2 = 2^3 = 8$$

$$3 \to a_3 = 3^3 = 27$$

$$\vdots$$

$$n \to a_n = n^3$$

La rappresentazione di una successione

Una successione può essere rappresentata

Tramite il termine generale a_n espresso in funzione di n.

Tramite regola ricorsiva così definita:

$$\begin{cases} a_0 & \text{: valore del primo termine della successione} \\ a_n & \text{: regola che esprime } a_n \text{ in funzione di } a_{n-1} \end{cases}$$

ESEMPIO

La successione 0, 2, 4, 6, 8, 10, … può essere rappresentata

tramite termine generale

$$\{2n\}$$

tramite regola ricorsiva

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 2 + a_{n-1} \end{cases}$$

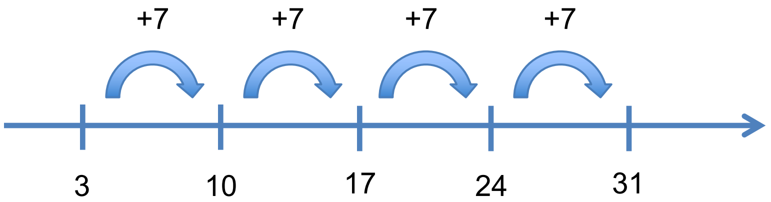
Le progressioni aritmetiche

Una successione di numeri reali tali che la differenza tra un termine e quello immediatamente precedente sia costante si chiama **progressione aritmetica**. La differenza costante si chiama **ragione** della progressione.

Indicando con d la ragione, si ha che $a_n = a_{n-1} + d$.

ESEMPIO

La successione 3, 10, 17, 24, 31, …
è una progressione aritmetica di ragione 7.



Si può definire anche in modo ricorsivo: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 7 \end{cases}$

Come si calcolano i termini di una progressione aritmetica

- Il termine a_n di una progressione aritmetica di ragione d è uguale a:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

ESEMPIO

In una progressione aritmetica di ragione *d* = 4 e primo termine $a_1 = 11$, calcoliamo a_{15}

$$\boxed{a_{15} = 11 + 14 \cdot 4 = 67}$$

- Conoscendo il termine a_k di una progressione aritmetica di ragione d, il termine a_s è uguale a:

$$\boxed{a_s = a_k + (s-k) \cdot d}$$

ESEMPIO

In una progressione aritmetica di ragione d = 4, sapendo che $a_{12} = 42$, calcoliamo a_{30}

$$\boxed{a_{30} = 42 + (30-12) \cdot 4 \rightarrow a_{30} = 114}$$

La somma dei termini di una progressione aritmetica

Proprietà:

Considerati i primi n termini di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti dagli estremi a_{k+1} e a_{n-k} è costante ed è uguale alla somma del primo e dell'*n*-esimo termine:

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n = \text{costante}$$

Da questa proprietà si ottiene la formula per il calcolo della somma dei primi n termini di una progressione aritmetica:

La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale a: $\boxed{S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}$

ESEMPIO

Troviamo la somma dei primi 15 termini di una progressione aritmetica di ragione 3 e con $a_1 = 12$.

calcoliamo: $a_{15} = 12 + 14 \cdot 3 = 54$

la somma richiesta è uguale a: $S_{15} = \frac{15(12+54)}{2} = 495$

Le progressioni geometriche

Una successione di numeri reali tale che il rapporto tra un termine e quello immediatamente precedente sia costante si chiama **progressione geometrica**. Il rapporto costante si chiama **ragione della progressione**.

Indicando con q la ragione, in ogni progressione geometrica il termine a_n si ottiene da a_{n-1} moltiplicando per q :

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q}$$

ESEMPIO

La successione definita in modo ricorsivo da $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 8 \end{cases}$

È una progressione geometrica avente il primo termine uguale a 3 e ragione $q = 8$.

I suoi primi termini sono: 3, 24, 192, 1536, 12288, …

Come si calcolano i termini di una progressione geometrica

Il termine a_n di una progressione geometrica di ragione q è uguale a:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Il termine a_s, in funzione del termine a_k è uguale a:

$$\boxed{a_s = a_k \cdot q^{s-k}}$$

ESEMPIO:

- se $a_1 = 3$ e $q = 2$: $a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$
- Se $a_3 = 64$ e $q = \frac{1}{2}$: $a_8 = a_3 \cdot q^{8-3} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2$

Somma e prodotto dei termini di una progressione geometrica

- La somma dei primi n termini di una progressione geometrica è data dalla formula:

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

- Il prodotto dei primi n termini è dato da:

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

ESEMPIO:

La somma e il prodotto dei primi 6 termini della progressione geometrica con $a_1 = 4$ e $q = 2$ è

$$S_6 = 4 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 252$$

essendo $a_6 = 4 \cdot 2^5 = 128 \Rightarrow P_6 = \sqrt{(4 \cdot 128)^6} = 512^3$