Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

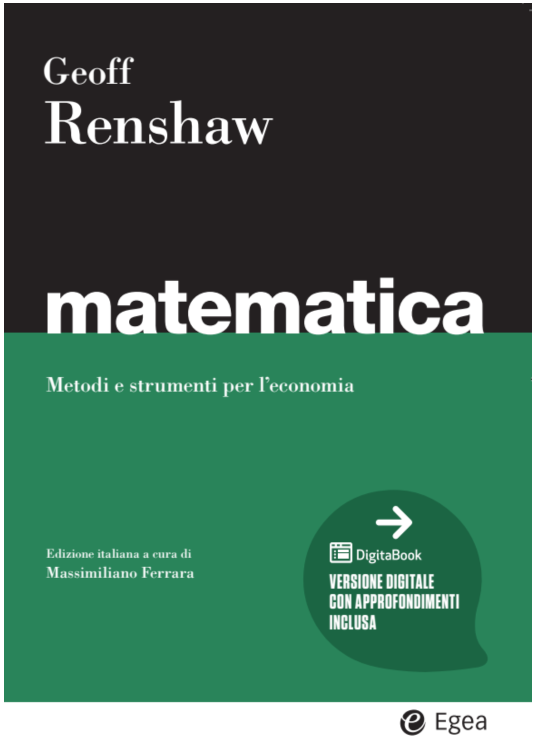
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 7 – Le derivate nello studio di funzione



Funzioni crescenti e decrescenti

Strettamente crescenti = *y* aumenta all'aumentare di *x*.

Strettamente decrescenti = *y* diminuisce all'aumentare di *x*.

Una funzione può essere crescente/decrescente anche solo su un dato intervallo di *x*.

Poiché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ misura la pendenza, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ > 0 o < 0 ci dice se la funzione è crescente oppure decrescente.

(È una condizione sufficiente, ma non necessaria; un controesempio è dato da $y = x^3$)

Valori massimi e minimi

La fig. 7.3 illustra che cos'è un massimo o un minimo locale.

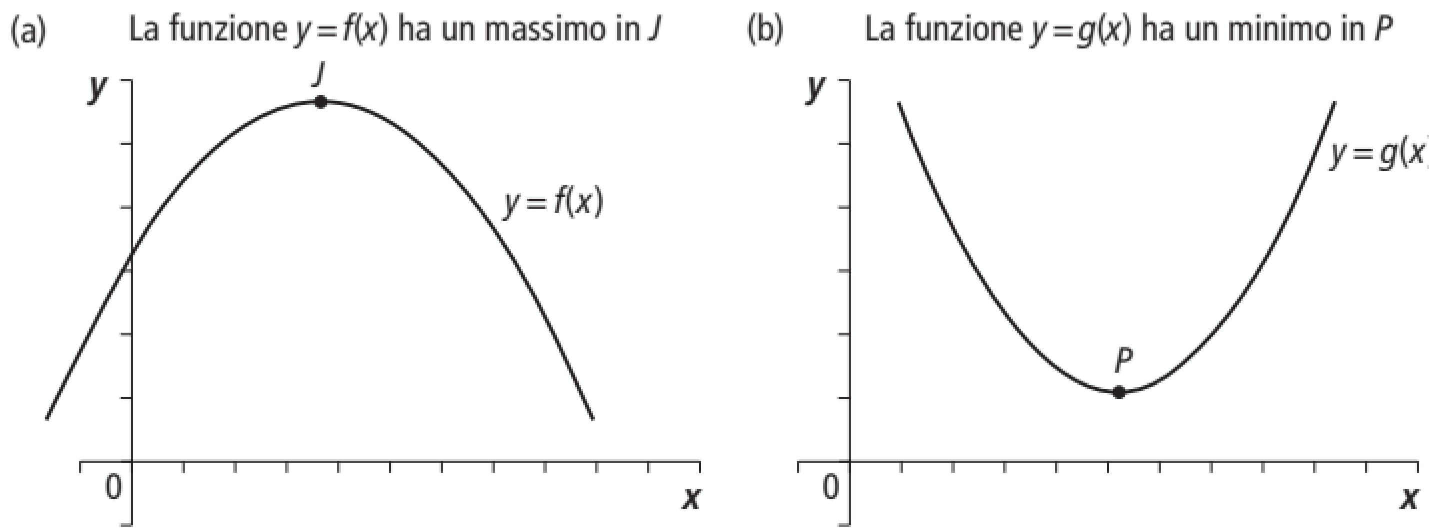
Per localizzare tali punti possiamo utilizzare le derivate, in quanto in essi le tangenti sono orizzontali. Vengono perciò detti **punti stazionari**.

Nuova idea: poiché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ è una funzione di *x*, si può tracciarne il grafico con *x* sull'asse orizzontale e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ su quello verticale.

Esempio: $y = -x^2 + 10x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 10$

Il grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ è quello di una funzione lineare con pendenza −2 e intercetta 10.

Figura 7.3 Valori massimo e minimo di una funzione



Massimi

Osserva la fig. 7.4.

La funzione $y = -x^2 + 10x$ ha un massimo locale in *J*, dove *x* = 5.

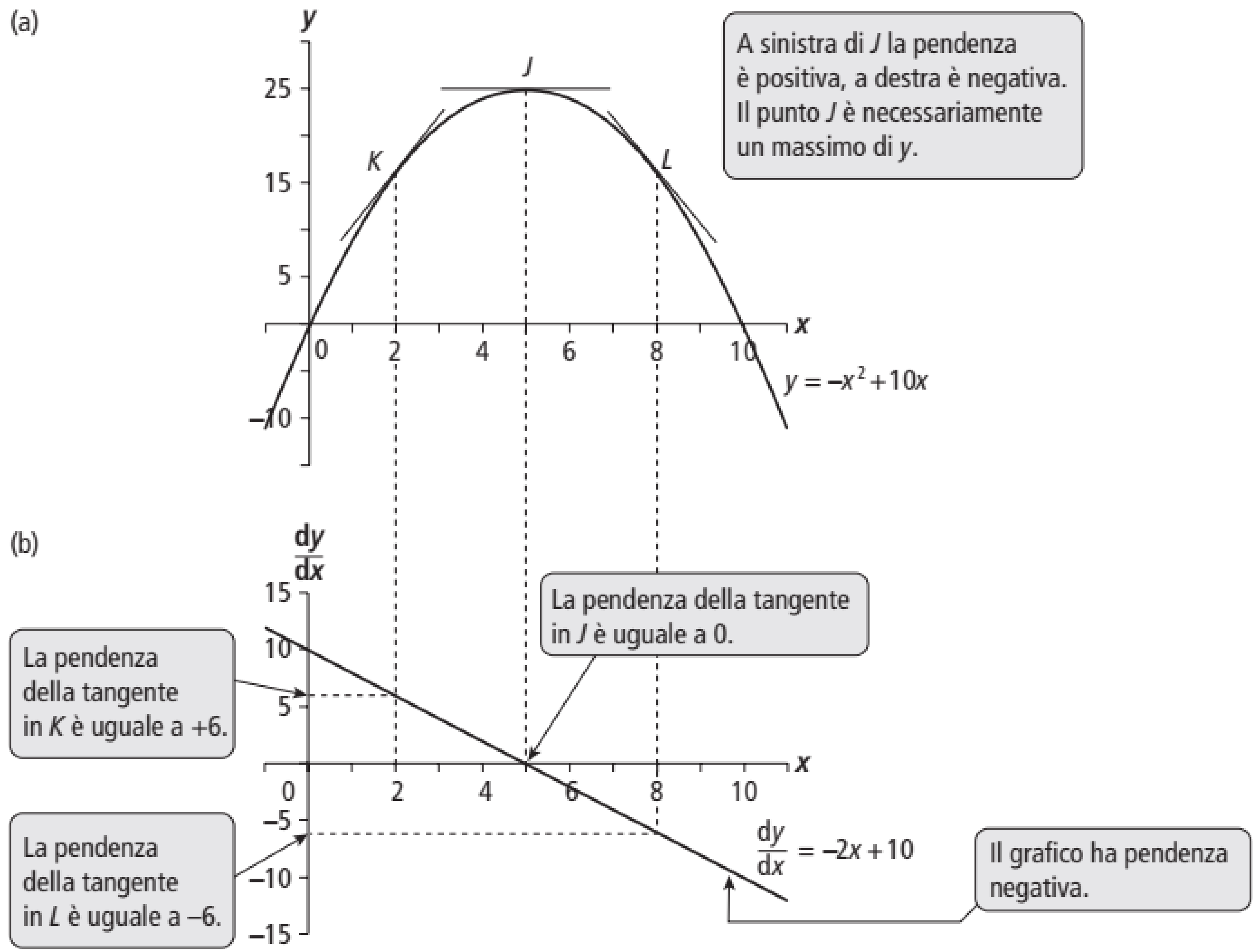
La derivata misura la pendenza della retta tangente, che è positiva in *K*, zero in *J* (tangente orizzontale) e negativa in *L*.

Ciò è confermato dal grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 10$.

Esso ha pendenza verso il basso e interseca l'asse *x* in *x* = 5, dove *y* raggiunge il suo valore massimo.

Perciò per *x* = 5, si ha $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 10 = 0$.

Figura 7.4 Valore massimo della funzione $y = -x^2 + 10x$



Minimi

Osserva la fig. 7.5.

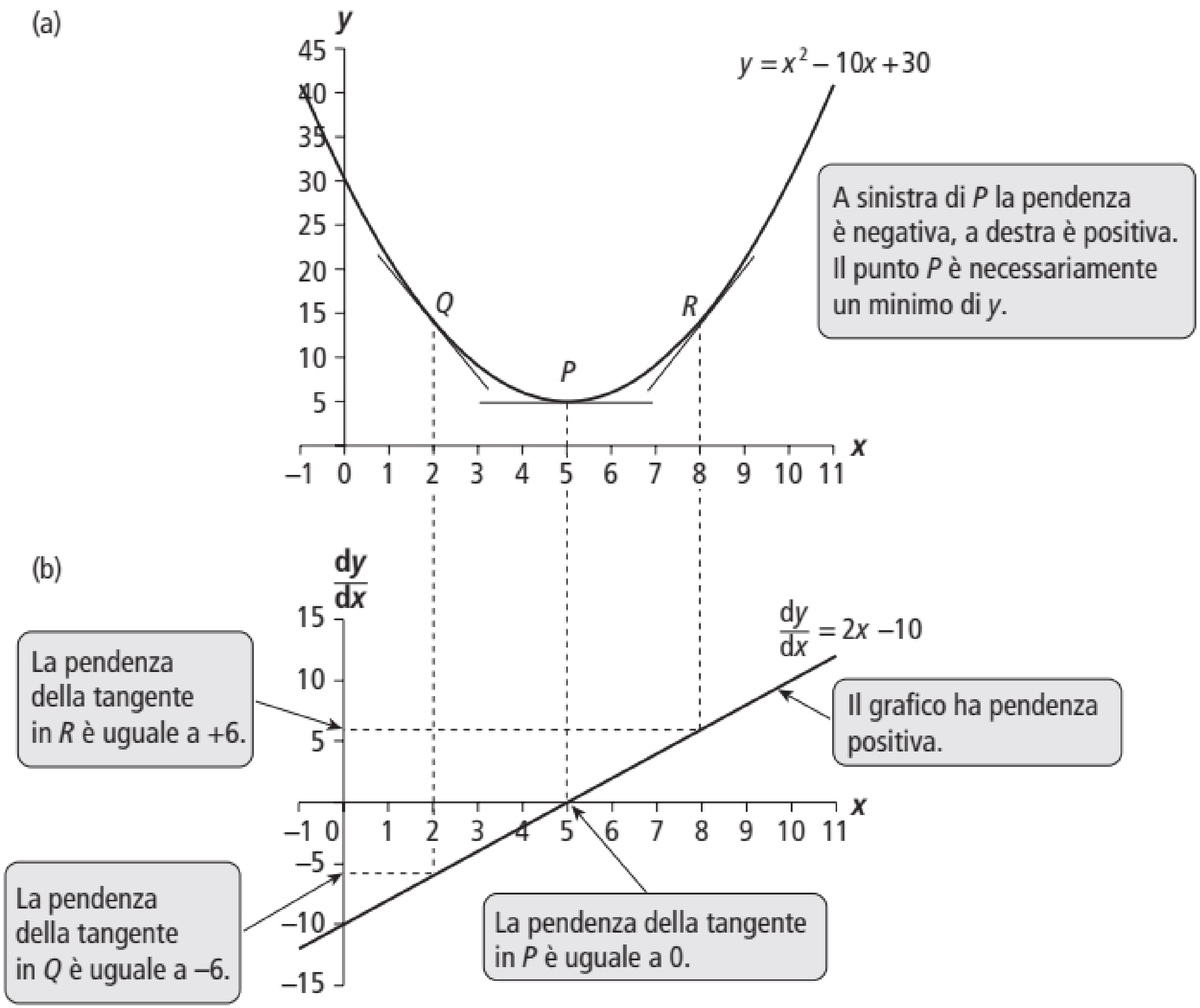
La funzione $y = x^2 - 10x + 30$ ha un minimo locale in *P*, dove *x* = 5.

Questa volta la derivata è negativa in *Q*, zero in *P* (tangente orizzontale) e positiva in *R*.

Ciò è confermato dal grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 10$. Esso ha pendenza verso l'alto e interseca l'asse *x* in *x* = 5, dove *y* raggiunge il suo valore minimo.

Perciò per *x* = 5, si ha $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 10 = 0$.

Figura 7.5 Valore minimo della funzione $y = x^2 - 10x + 30$



Come distinguere un massimo da un minimo?

La risposta si trova osservando il grafico della derivata. Se il punto in esame è un massimo (fig. 7.4), il grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ è decrescente; se è un minimo (fig. 7.5) tale grafico è crescente.

Nuova idea: la derivata seconda

Si tratta della «derivata della funzione derivata», $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, e misura la pendenza del grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. La si trova applicando le regole di derivazione alla funzione derivata prima.

Nel caso del **massimo** (fig. 7.4) avevamo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 10$,

perciò $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ vale -2 **(NEGATIVA)**

Nel caso del **minimo** (fig. 7.5) avevamo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 10$,

perciò $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ vale 2 **(POSITIVA)**

Notazione: la scrittura $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ è complicata, perciò la scriviamo nella forma $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ o nella forma $f''(x)$.

Riassumendo:

Sia *y* una funzione («regolare» e continua nel punto *P.*

Se $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} < 0$ MAX

Se $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} > 0$ MIN (Regola 7.1)

Nuova idea: condizioni del primo ordine e del secondo ordine

Esempi: vedi gli Esempi 7.5 e 7.6 nel libro.

Flessi

Premessa: la derivata terza

È la derivata $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ di $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, e misura la pendenza del grafico di $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

La si trova applicando le regole di derivazione alla derivata

seconda. La si scrive in maniera più compatta come $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ o $f'''(x)$.

PUNTO CHIAVE: un flesso è un massimo o un minimo non della funzione, bensì della sua pendenza, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Per la Regola 7.1, il max/min di una funzione si trova dove la derivata prima è nulla e la derivata seconda è positiva (min) o negativa (max).

La derivata prima di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ è $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ e la derivata seconda è $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

Pertanto, in un punto di flesso si ha (Regola 7.2):

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ > 0 (per MIN di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$) o < 0 (per MAX di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$)

Flessi: Esempio 1 (1)

Osserva la fig. 7.8.

Nella parte (a), il punto *K*, dove *x* = 3, è un punto stazionario perché la tangente è orizzontale (quindi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$), ma è anche un punto di flesso perché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ vi assume il suo valore minimo (zero). È un minimo perché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ è positiva sia a destra sia a sinistra di *K*.

Ciò è confermato dalla parte (b), dove il grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ha un minimo per *x* = 3.

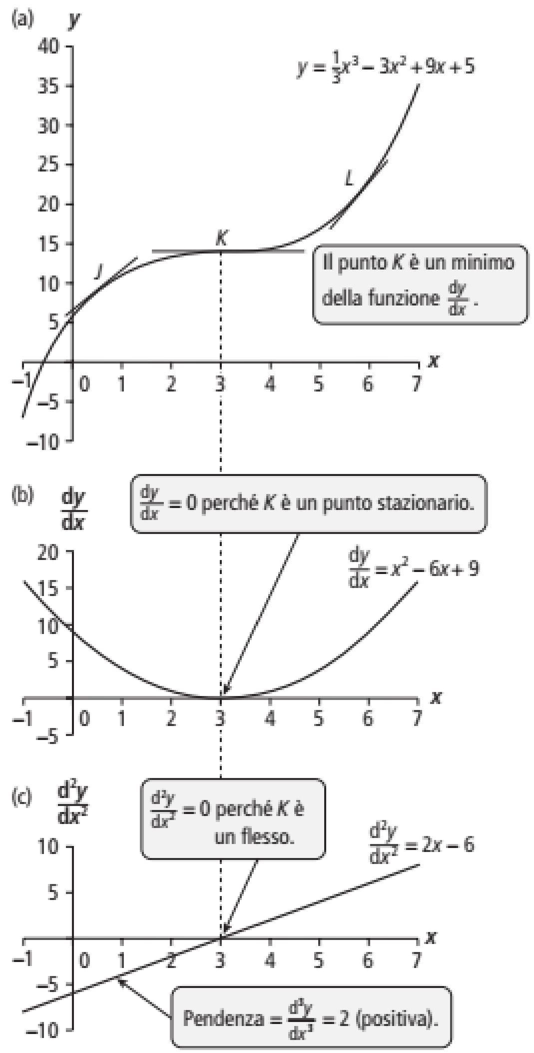
Flessi: Esempio 1 (2)

Un'ulteriore conferma viene dalla parte (c), dove per $x = 3$ si ha:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0 \text{ e } \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} > 0$$

Perché questo punto è un minimo di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Figura 7.8
Grafico di $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 5$
con un punto stazionario che è un flesso



Flessi: Esempio 2 (1)

Osserva la fig. 7.9.

È identica alla fig. 7.8 tranne per il fatto che, nella parte (a), *Q* dove $x = 3$ è ora un massimo di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ anziché un minimo.

Ciò perché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ in *Q* ma < 0 a sinistra e a destra del punto (e 0 è maggiore di ogni numero negativo!)

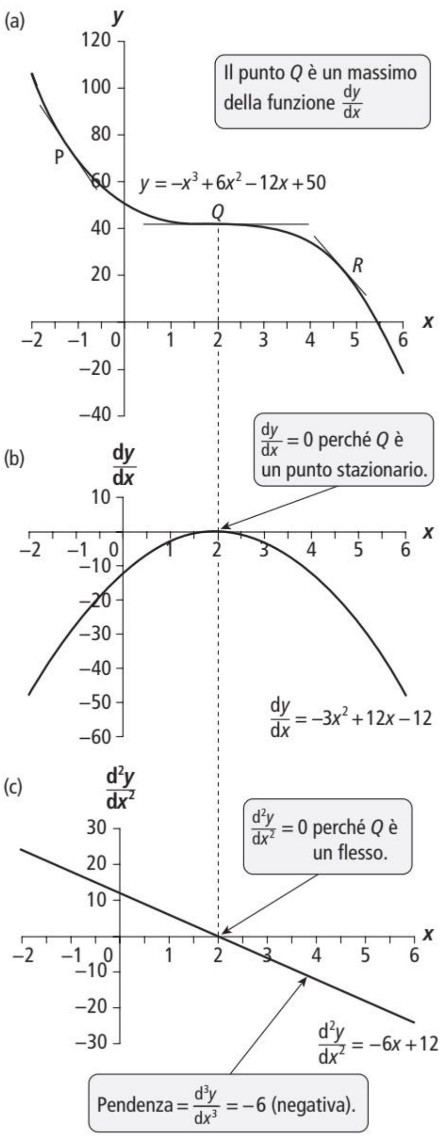
La parte (b) lo conferma: il grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ha un punto di massimo in $x = 3$.

Flessi: Esempio 2 (2)

Di conseguenza, nella parte (c) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ per x = 3 dato che questo punto è un punto stazionario di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Infine, nella parte (c) abbiamo $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} > 0$ per x = 3 dato che questo punto è un punto di massimo di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (anziché di minimo).

Figura 7.9
Grafico di $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 50$
con un punto stazionario che è un flesso



Riassumendo:

Facciamo riferimento al punto *K* in fig. 7.8 e al punto *Q* in fig. 7.9:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ perché *K* e *Q* sono punti stazionari (tra l'altro)

$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ perché *K* e *Q* sono punti di flesso (pendenza max/min)

$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} > 0$ in *K* perché è un minimo della pendenza

$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} < 0$ in *Q* perché è un massimo della pendenza   (Regola 7.2)

Punti di flesso che non sono punti stazionari

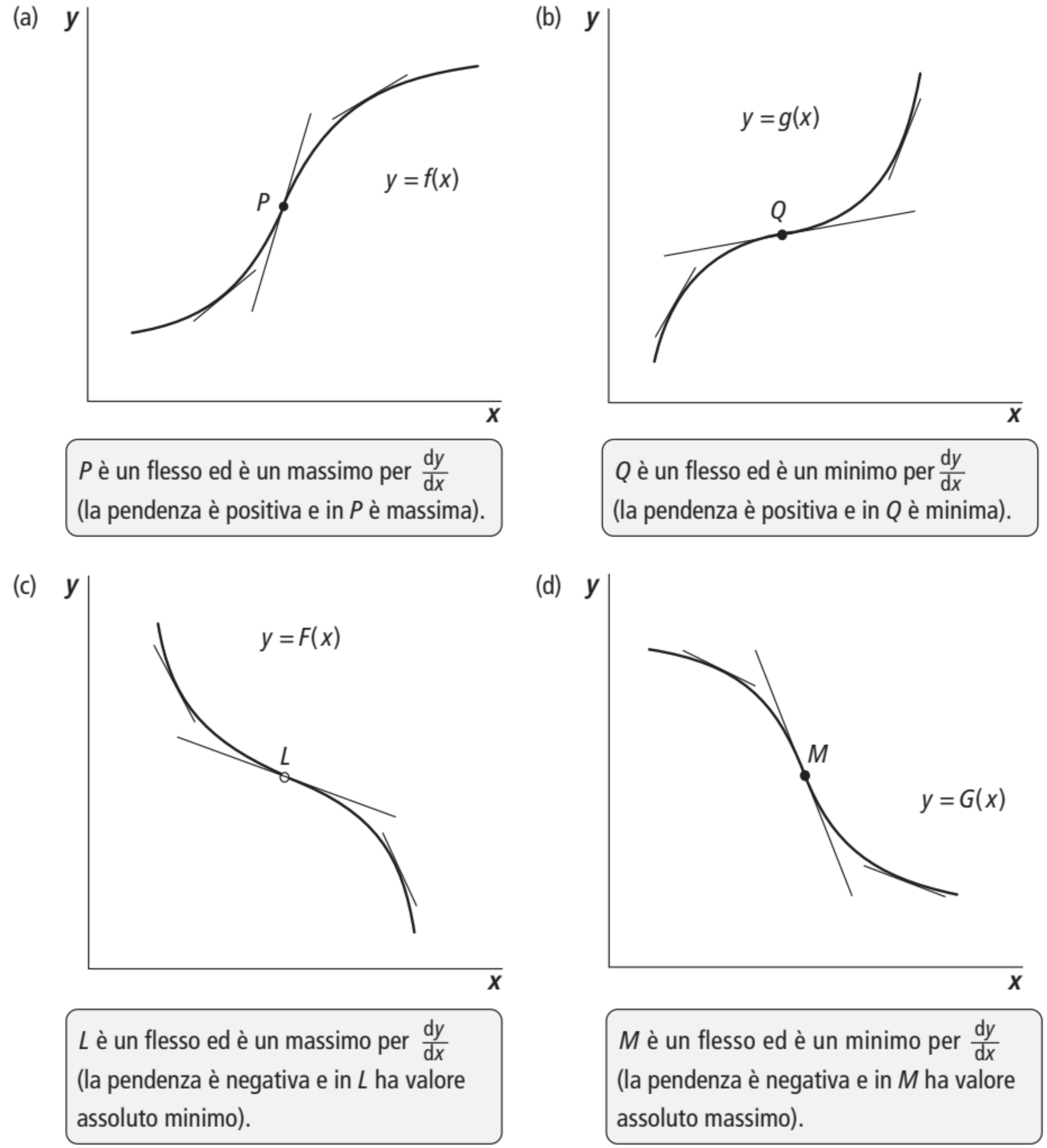
Nelle figg. 7.8 e 7.9 comparivano punti di flesso che erano anche punti stazionari. Tuttavia un punto di flesso non deve necessariamente essere anche un punto stazionario. Osserva la fig. 7.10, dove compaiono 4 tipi di punti di flesso che non sono punti stazionari. *P*, *Q*, *L* e *M* non sono punti a tangente orizzontale, perché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \neq 0$.

P e *L* sono massimi di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, per cui $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} < 0$

Q e *M* sono minimi di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, per cui $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} > 0$

Osservazione:
In un flesso, la tangente interseca il grafico della funzione.

Figura 7.10 Flessi che si presentano in punti non stazionari



Funzioni concave e convesse

In una **funzione convessa** (o **con concavità verso l'alto**) **Convex** la pendenza ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$) aumenta all'aumentare di *x*.

Il grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ha pendenza positiva, perciò $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} > 0$

Esempi: figg. 7.15 e 7.17

In una **funzione concava** (o **con concavità verso il basso**) la pendenza ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$) diminuisce all'aumentare di *x*.

Il grafico di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ha pendenza negativa, perciò $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} < 0$

Esempi: figg. 7.16 e 7.18

Figura 7.15
La funzione $y = 10x^2 + 5x + 20$ (avente concavità verso l'alto fra $x = 0$ e $x = 5$)

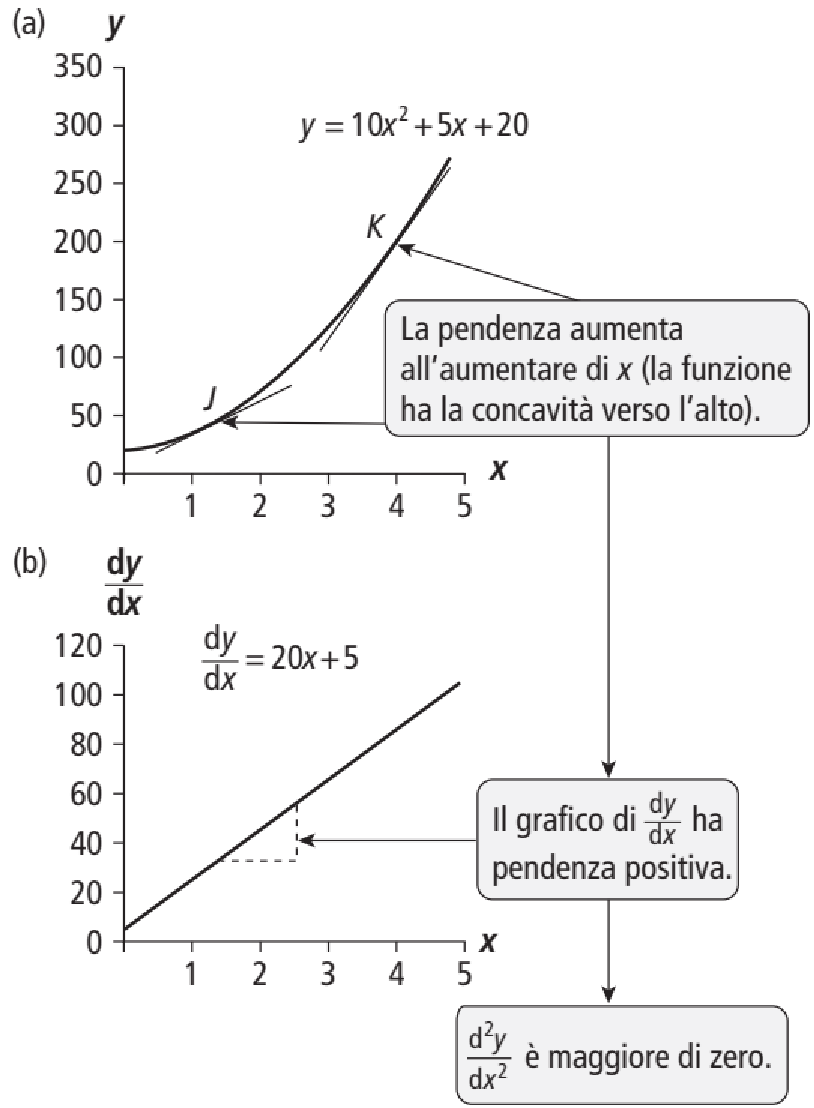


Figura 7.16
La funzione $y = -x^2 + 12x + 10$ (avente concavità verso il basso fra $x = 0$ e $x = 5$)

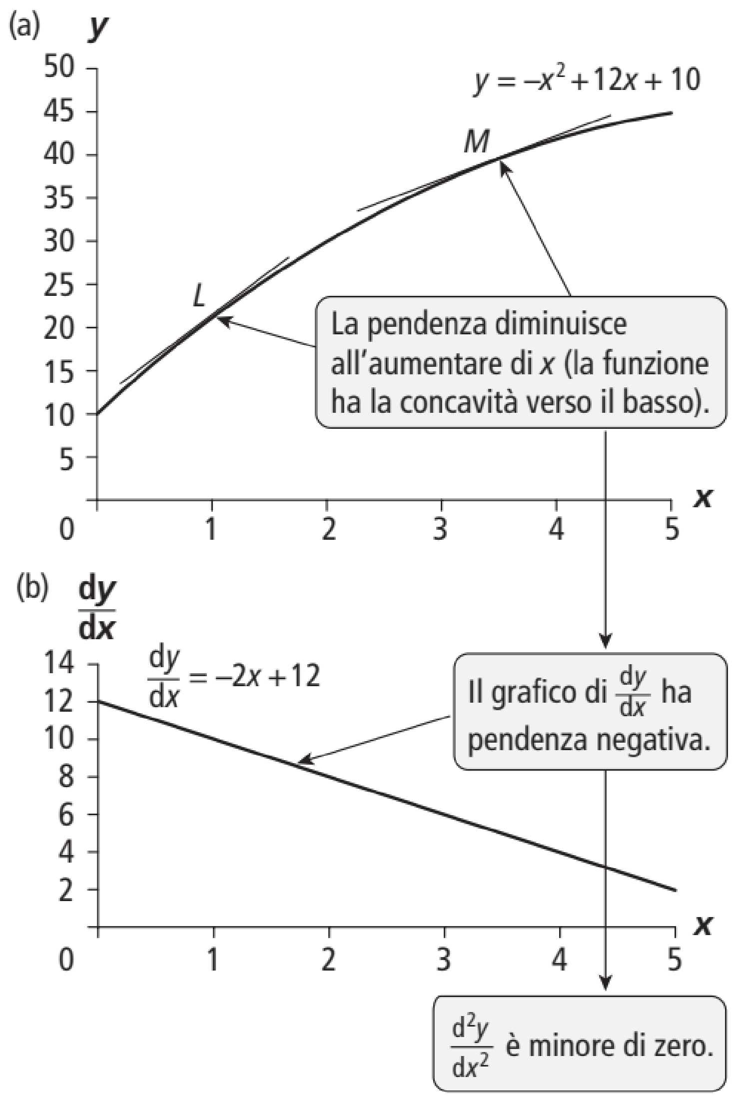


Figura 7.17
La funzione $y = x^2 - 12x + 50$ (avente concavità verso l'alto fra $x = 0$ e $x = 5$)

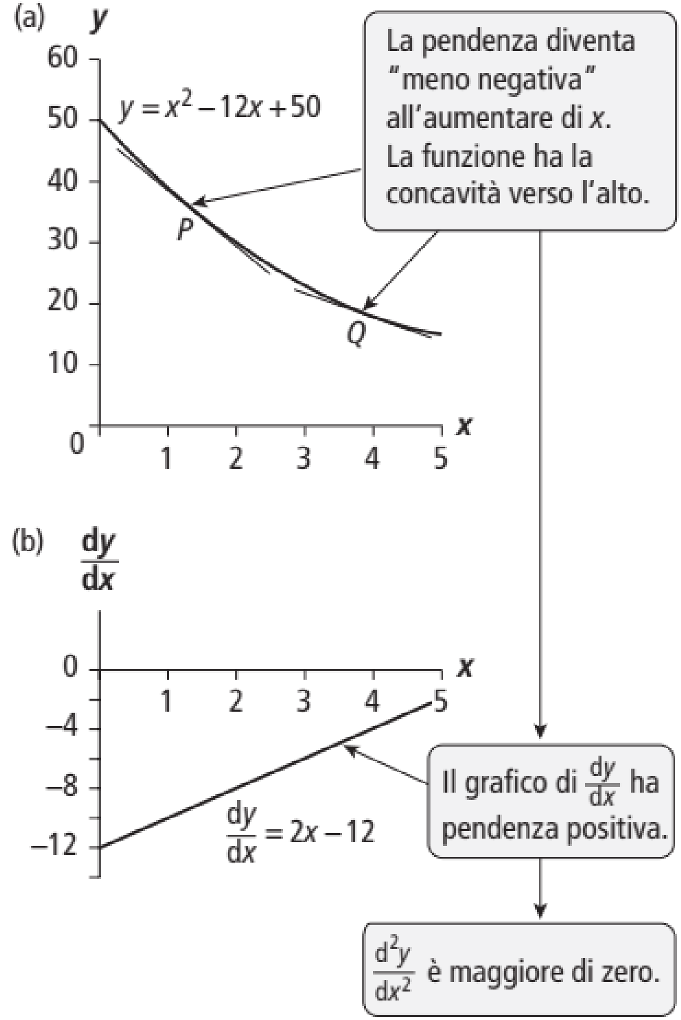
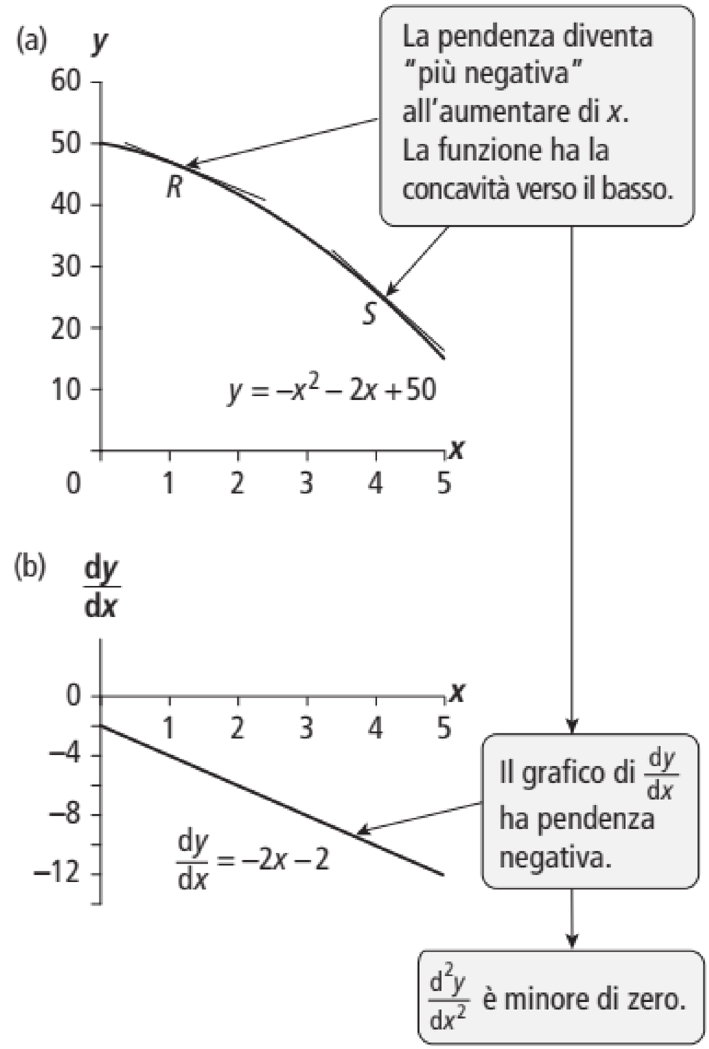


Figura 7.18
La funzione $y = -x^2 - 2x + 50$ (avente concavità verso il basso fra $x = 0$ e $x = 5$)



Differenziale di una funzione

Richiamiamo la definizione di derivata: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ciò implica che $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx è piccola.

Pertanto $\Delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Delta x$ (con errore trascurabile) quando Δx è piccola, dove Δy è la variazione di *y* prodotta da una piccola variazione di *x*, Δx. Scriveremo dx = Δx per Δx piccole, e analogamente dy = Δy.

Il **differenziale** della funzione *y* è: $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ (Regola 7.4). Esso misura approssimativamente la variazione di *y* conseguente a una piccola variazione di *x*, dx.

Il differenziale come approssimazione lineare

La formula del differenziale cotiene un leggero errore, perché assume $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, il che non vale per la maggior parte delle funzioni. Possiamo fare in modo che l'errore sia trascurabile assumendo che Δx sia «piccola», in quanto allora $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tuttavia, se la funzione è lineare, l'errore è nullo perché $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ per ogni Δx.

Pertanto, se applicata a una funzione non lineare, la formula del differenziale tratta in effetti la funzione come se fosse lineare.

È qui che compare l'errore. Vedi la fig. 7.19 (e l'Esempio 7.11).

Un esempio di differenziale

Esempio: $\boldsymbol{y = x^2 + 4}$, x cresce da 3 a 3,01.

Perciò dx = 0,01 e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x = 6$ per x = 3.

Dalla Regola 7.4: $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 6 \times 0{,}01 = 0{,}06$

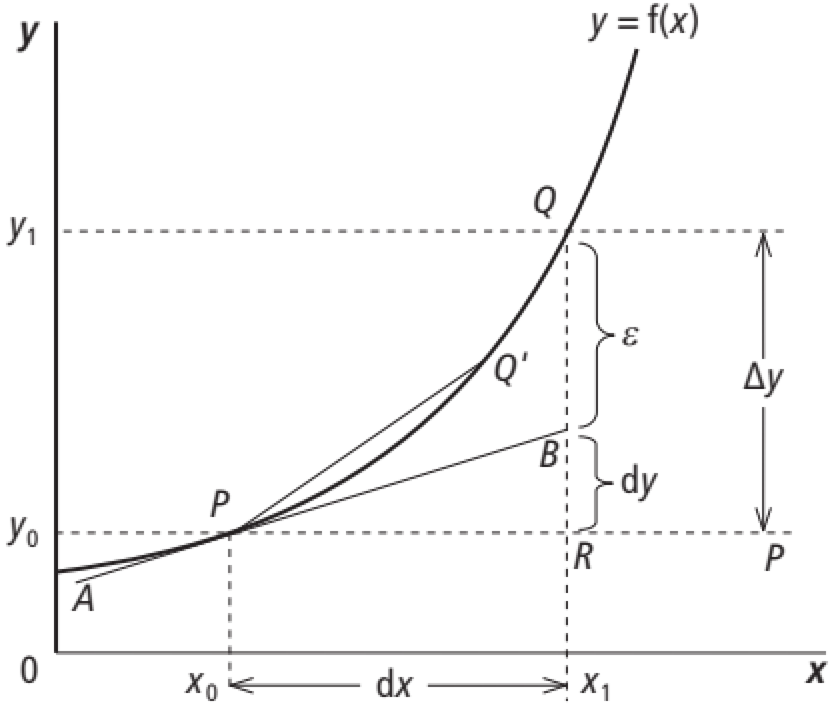
Per x = 3, $y = 3^2 + 4 = 13$

Per x = 3,01, $y = (3{,}01)^2 + 4 = 13{,}0601$

La variazione effettiva di y è $13{,}0601 - 13 = 0{,}0601$

E l'errore è ε = 0,0601 − 0,06 = 0,0001

Figura 7.19 La derivata prima come approssimazione della funzione $y = f(x)$



La distanza $QB = \varepsilon$ rappresenta l'errore che si commette quando si misura con dy la variazione di y, usando quindi la derivata come approssimazione lineare della funzione. Per dx che tende a zero l'errore tende a zero, perché Q tende a sovrapporsi a B.