Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

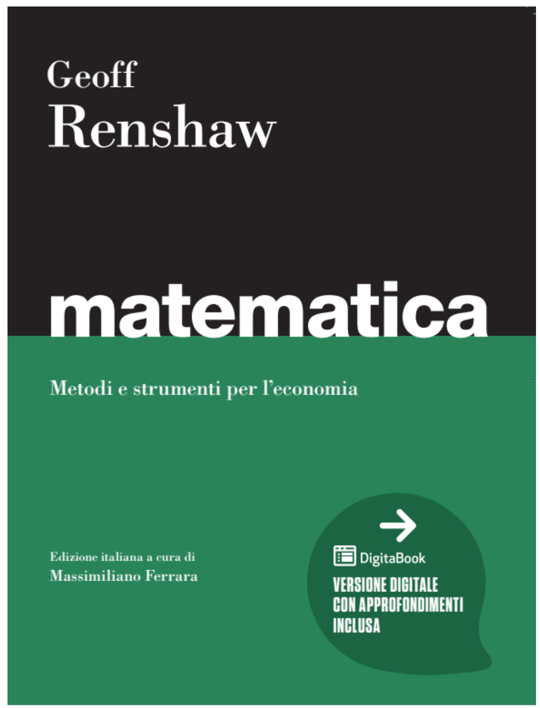
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 5 – Funzioni cubiche, curve algebriche e comportamento delle funzioni



Egea

La funzione cubica

Forma generale: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(a, b, c e d sono parametri)

Figura 5.1, caso elementare: $y = x^3$ e $y = -x^3$

Figura 5.2, $y = x^3 + 6x^2$ Forma tipica: 2 punti estremanti.

Figura 5.3, $y = x^3 + 6x^2 + 15x$ Altra forma tipica; il termine 15*x* aggiunge una decisa componente lineare, al posto dei due estremanti c'è un andamento a «esse».

Figura 5.1 Grafici di $y = x^3$ e di $y = -x^3$

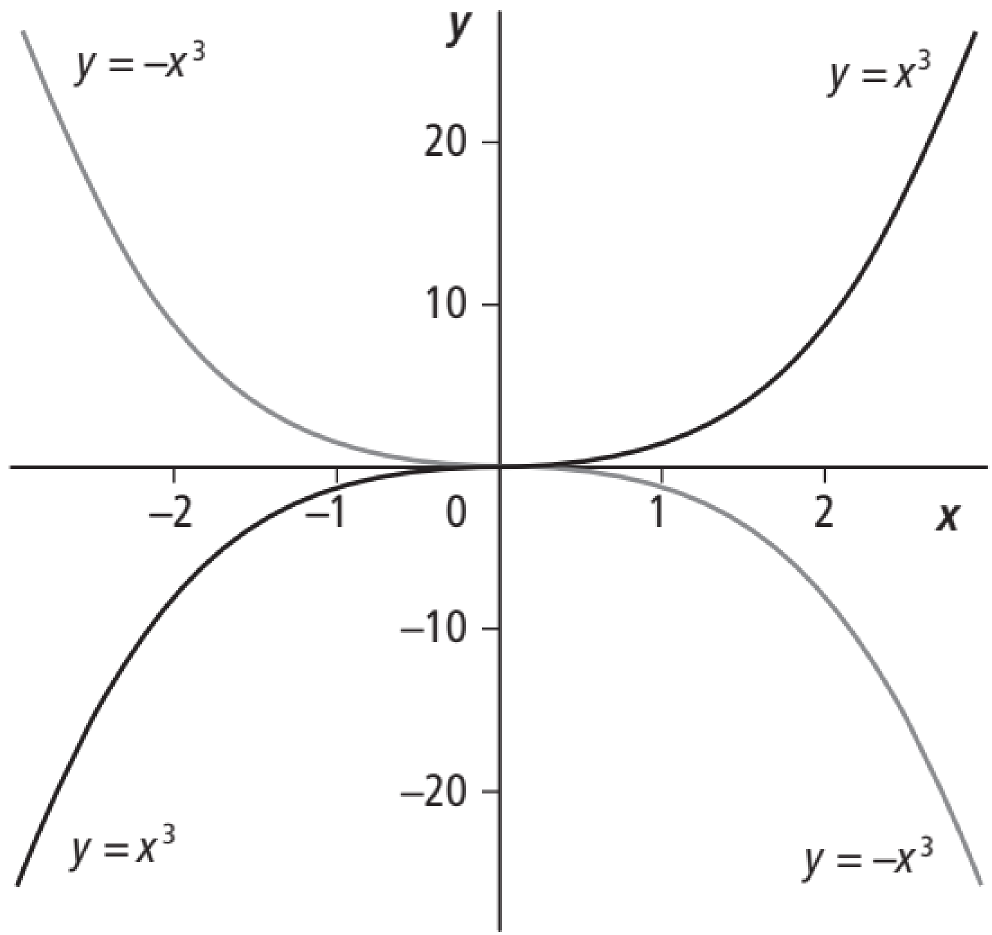
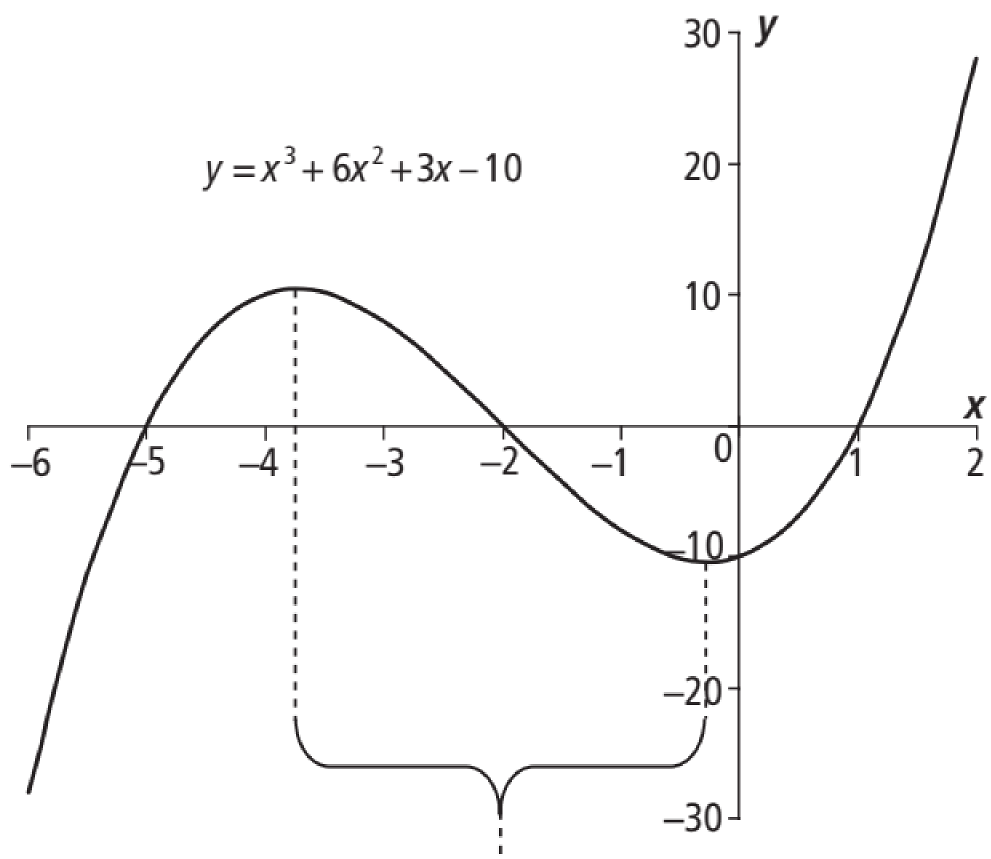
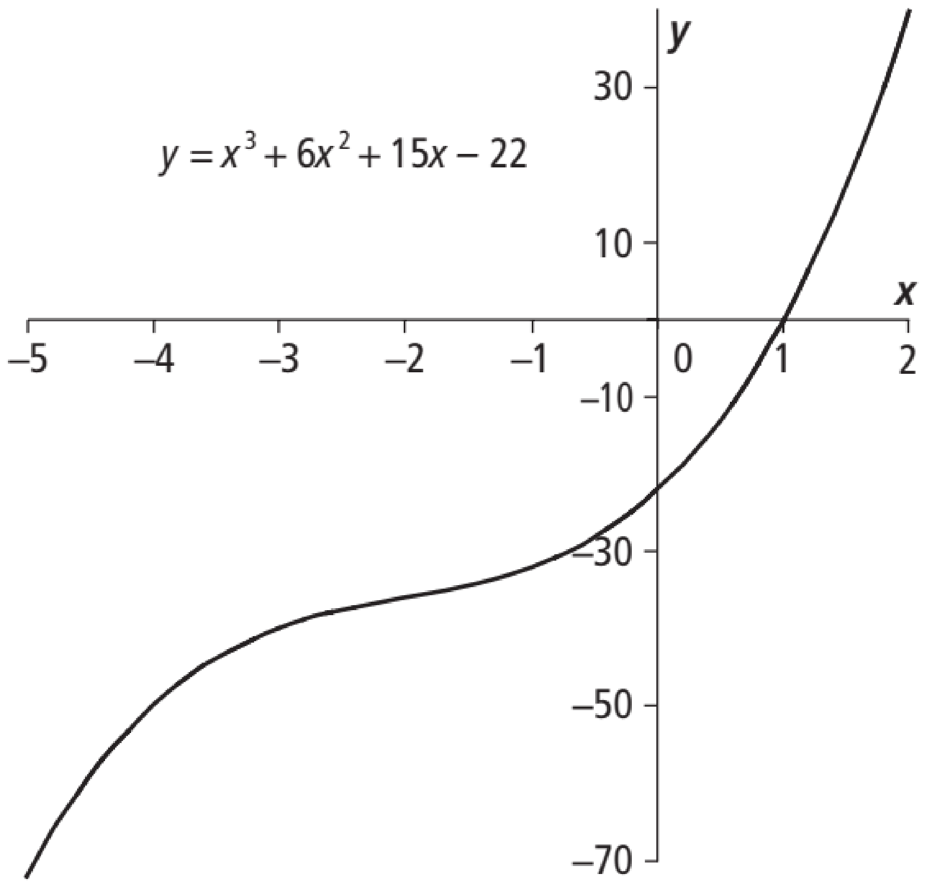


Figura 5.2 Grafico di $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$



In questo intervallo di valori di x la "spinta" verso l'alto dovuta al termine $6x^2$ è maggiore della "spinta" verso il basso dovuta ai termini x^3 e $3x$, perciò la curva assume una marcata conformazione a S e ha due punti estremanti, in cui passa dall'essere crescente all'essere decrescente e viceversa.

Figura 5.3 Grafico di $y = x^3 + 6x^2 + 15x - 22$



Quando x è negativa, la "spinta" verso l'alto dovuta al termine $6x^2$ è minore della "spinta" verso il basso dovuta ai termini x^3 e $15x$, perciò la curva assume una leggera conformazione a S e non ha punti estremanti di massimo o di minimo.

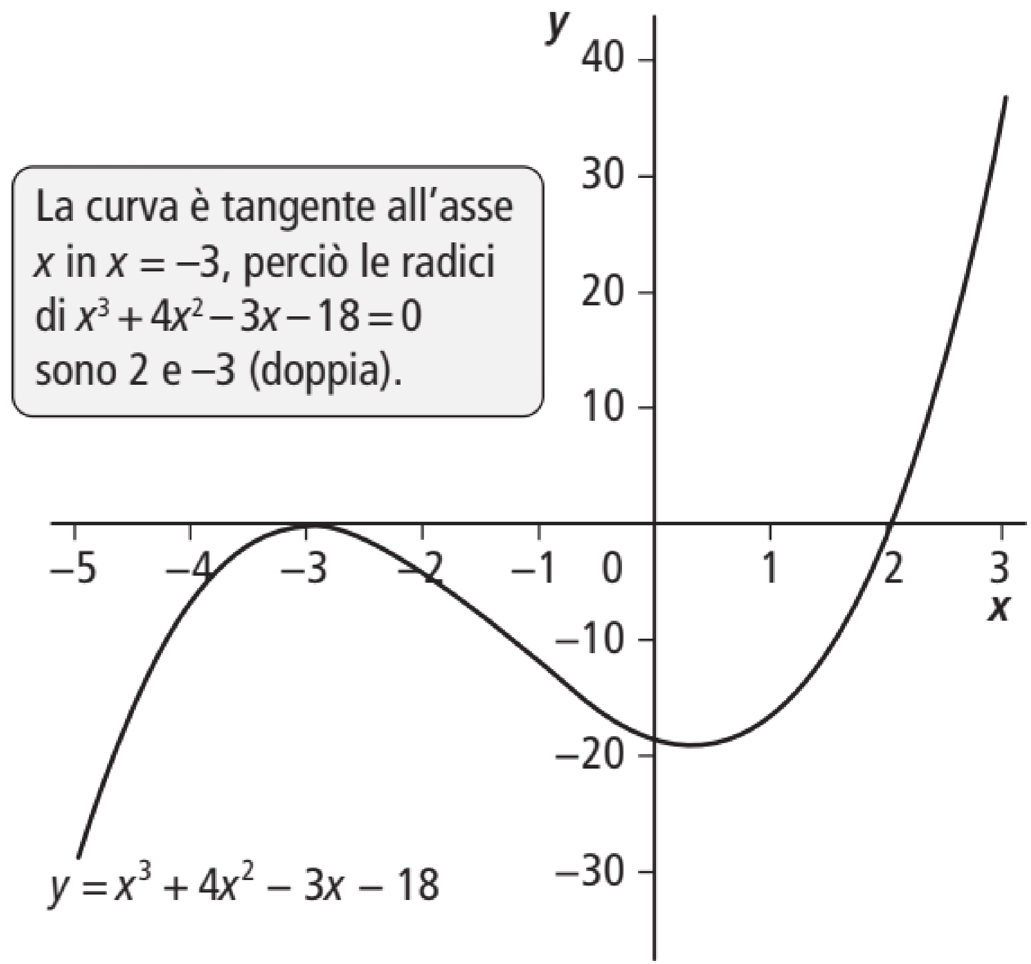
Soluzione grafica di un'equazione cubica

In fig. 5.2 la funzione cubica interseca l'asse *x* tre volte, perciò la corrispondente equazione cubica ha 3 radici reali. Dal grafico si deduce che $(x+5)(x+2)(x-1) \equiv x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

In fig. 5.3 c'è una sola intersezione, perciò una sola radice reale (e due complesse, in cui entrano in gioco i numeri immaginari)

In fig. 5.4 la funzione cubica ha un'intersezione e un punto di tangenza, perciò vi sono 2 radici reali, di cui la seconda è doppia.

Figura 5.4 Grafico di $y = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$



Polinomi di grado superiore

Funzione quartica: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Funzione quintica: $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

(e via dicendo)

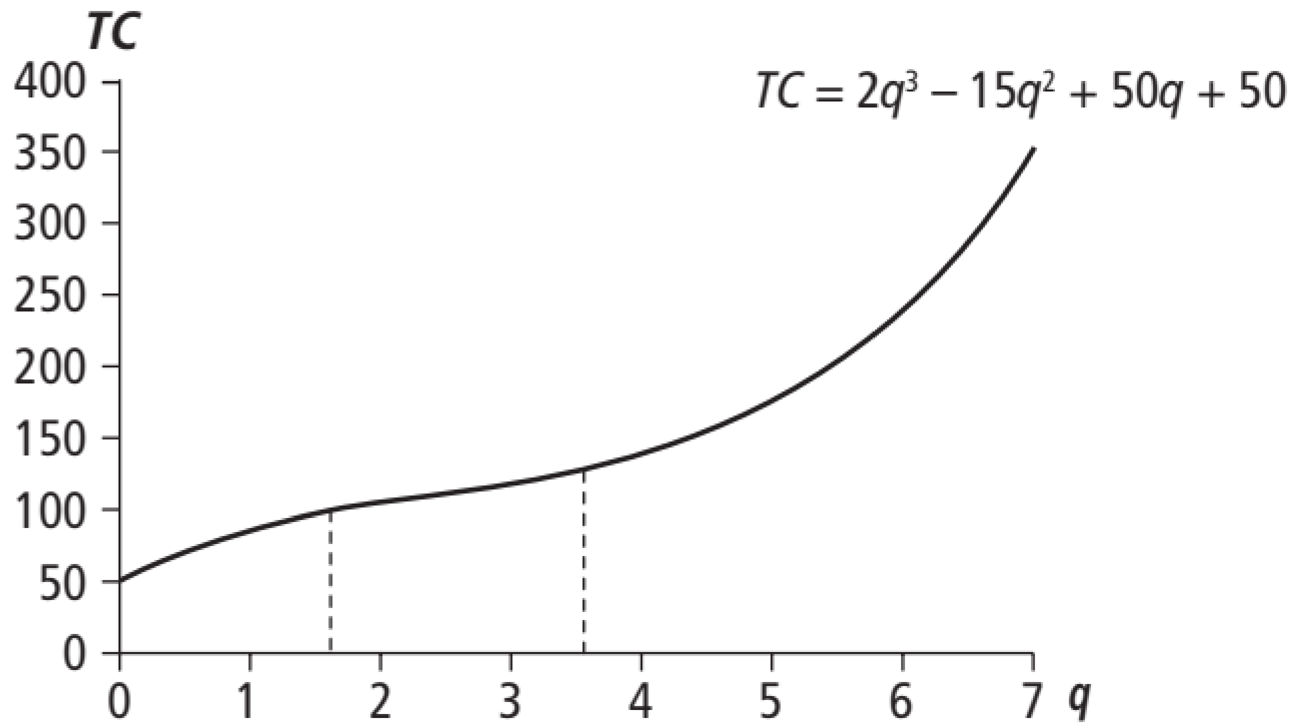
Le forme dei grafici diventano man mano più complicate. Queste funzioni non vengono usate spesso.

Applicazione della funzione cubica in economia

In fig. 5.5 si trova una forma plausibile per la funzione *TC* di breve periodo di un'impresa.

La tecnologia di produzione è tale che per basse quantità è relativamente difficile aumentare l'output, perciò la curva *TC* cresce abbastanza rapidamente. Altrettanto succede per grandi quantità. Per livelli intermedi, all'incirca fra 1,5 e 3,5 unità di output, è invece abbastanza facile aumentare la produzione, perciò la curva *TC* ha un andamento quasi piatto.

Figura 5.5 Una funzione di costo totale di breve periodo ad andamento cubico



Iperbole equilatera (1)

Il caso più semplice è $y = \frac{1}{x}$.

In riferimento alla fig. 5.6, si notano due caratteristiche:

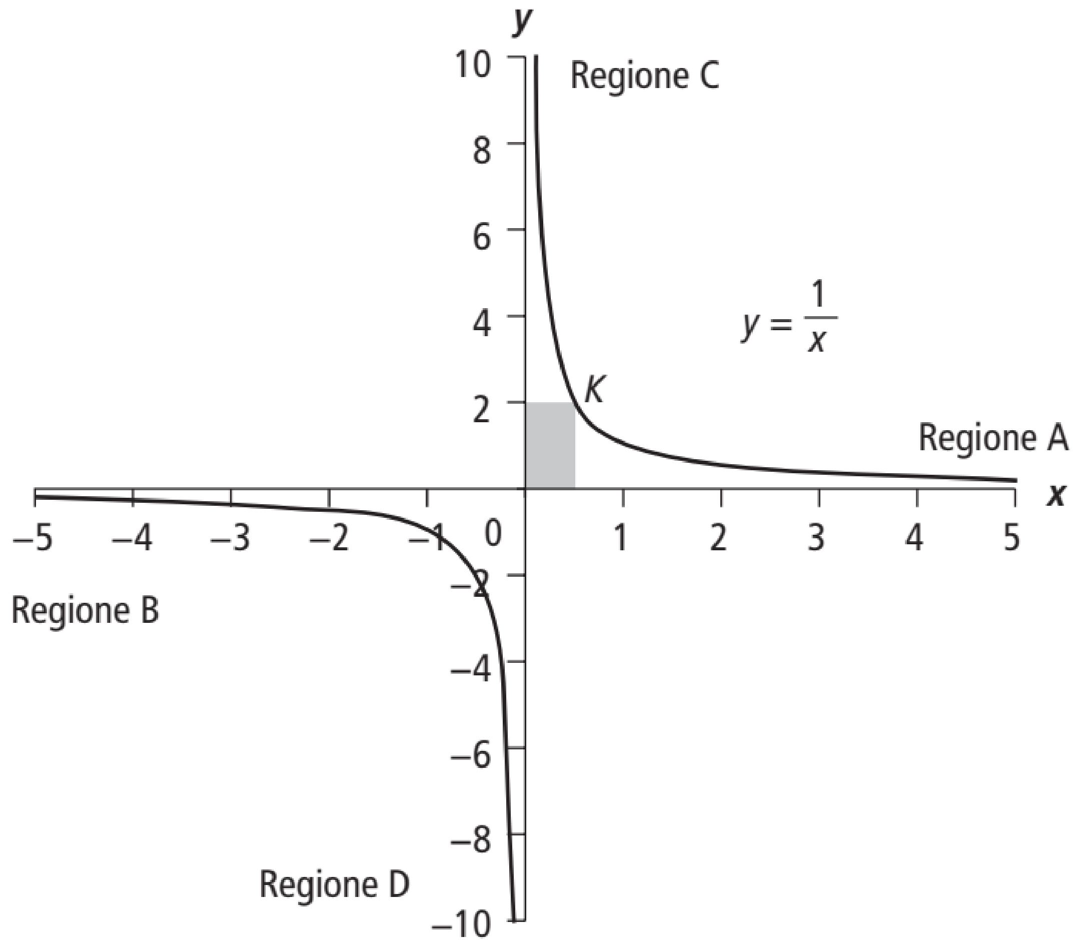
1. *y* tende a 0 per *x* che tende a +∞ o a −∞ (Regioni A e B). Ciò porta al concetto di **limite**. Scriveremo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$$

2. Per $x = 0$ non esiste un corrispondente valore di *y*. Vi è perciò una **discontinuità** nella funzione: *y* non è definita in $x = 0$.

Questi due concetti, i limiti e la discontinuità, svolgono un ruolo importante in economia.

Figura 5.6 Grafico di $y = \frac{1}{x}$



y tende a zero per *x* che tende a +∞ o a −∞, mentre tende a +∞ o a −∞ per *x* che tende a zero. In $x = 0$ la funzione presenta una discontinuità (non è ivi definita). Il rettangolo ombreggiato ha sempre la stessa area, indipendentemente dalla posizione di *K* sulla curva.

Iperbole equilatera (2)

Forma generale dell'equazione dell'iperbole equilatera: $y = \frac{c}{x+b} + a$

Esempio: $y = \frac{5}{x-2} + 3$ (fig. 5.7)

Caratteristiche importanti: $\lim_{x \to \pm\infty} y = 3$; discontinuità in $x = 2$.

Applicazione all'economia:

Funzione di domanda inversa: $p = \frac{15}{q^D} - 2$ (fig. 5.9)

1. Per $p = 0$, $q^D = 7{,}5$ Domanda totalmente soddisfatta

2. Il prezzo non è mai abbastanza alto da ridurre a zero la domanda, perché c'è una discontinuità in $q^D = 0$, dove p non è definito.

Figura 5.7 Grafico di $y = \dfrac{5}{x-2} + 3$

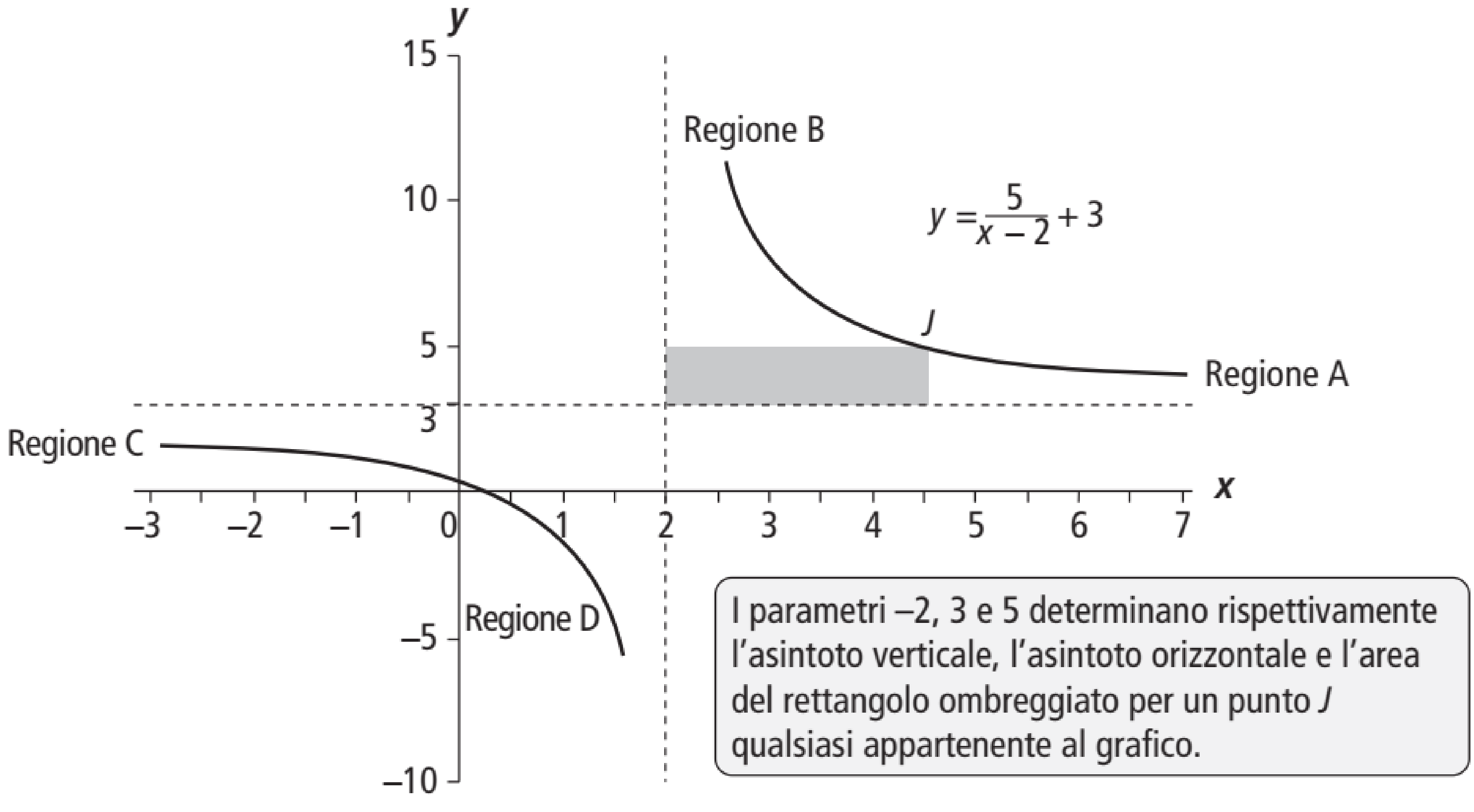
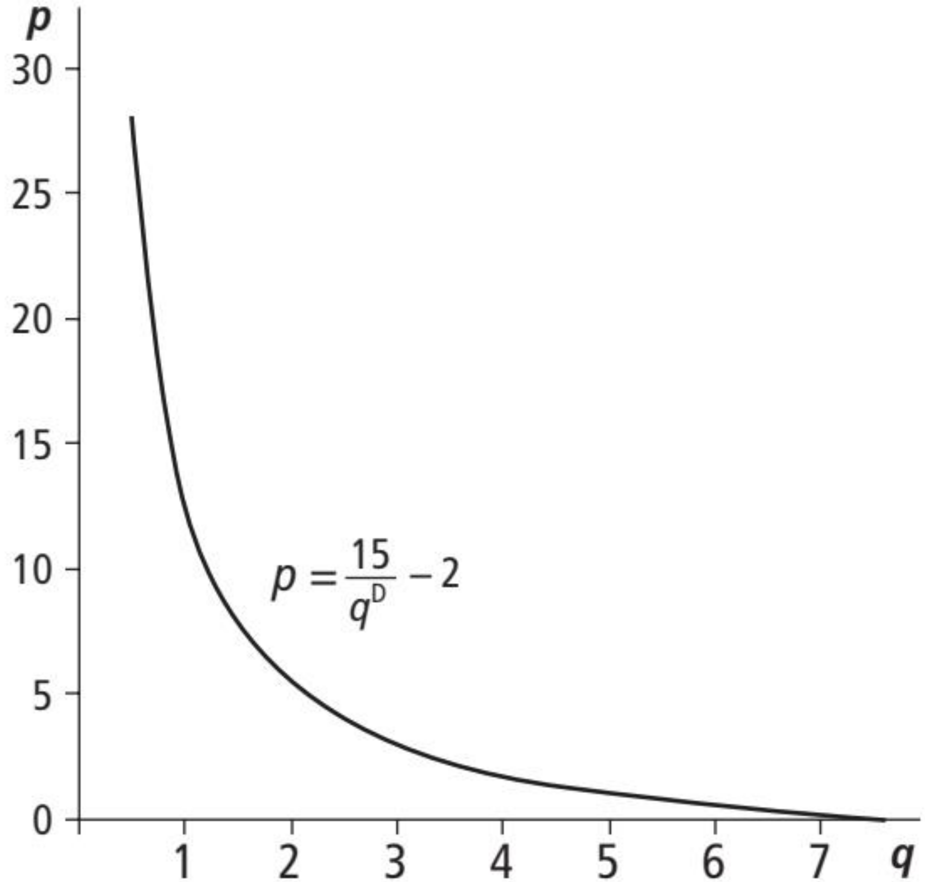


Figura 5.9 Grafico della funzione di domanda inversa $p = \dfrac{15}{q^D} - 2$



La funzione di domanda inversa $p = \dfrac{15}{q^D} - 2$ interseca l'asse q in $q = 7{,}5$, dove la domanda viene totalmente soddisfatta. La spesa totale diminuisce al diminuire del prezzo.

Altri tipi di curve

Circonferenza

Fig. 5.10: $x^2 + y^2 = 9$; circonferenza con centro l'origine e raggio $\sqrt{9} = 3$

Fig. 5.11 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$; circonferenza con centro in $x = 1$, $y = 2$ e raggio 3.

Ellisse

Fig. 5.12: l'aggiunta del termine *xy* a $x^2 + y^2 = 9$ produce il grafico di un'ellisse.

Anche sottraendo *xy* da $x^2 + y^2 = 9$ si ottiene un'ellisse, ma ruotata di 90°.

Forma generale: $x^2 + axy + y^2 = c^2$ dove *a* è soggetta alla restrizione $-2 < a < 2$, altrimenti risultano altri tipi di curve completamente diversi.

Figura 5.10 Grafico di $x^2 + y^2 = 9$

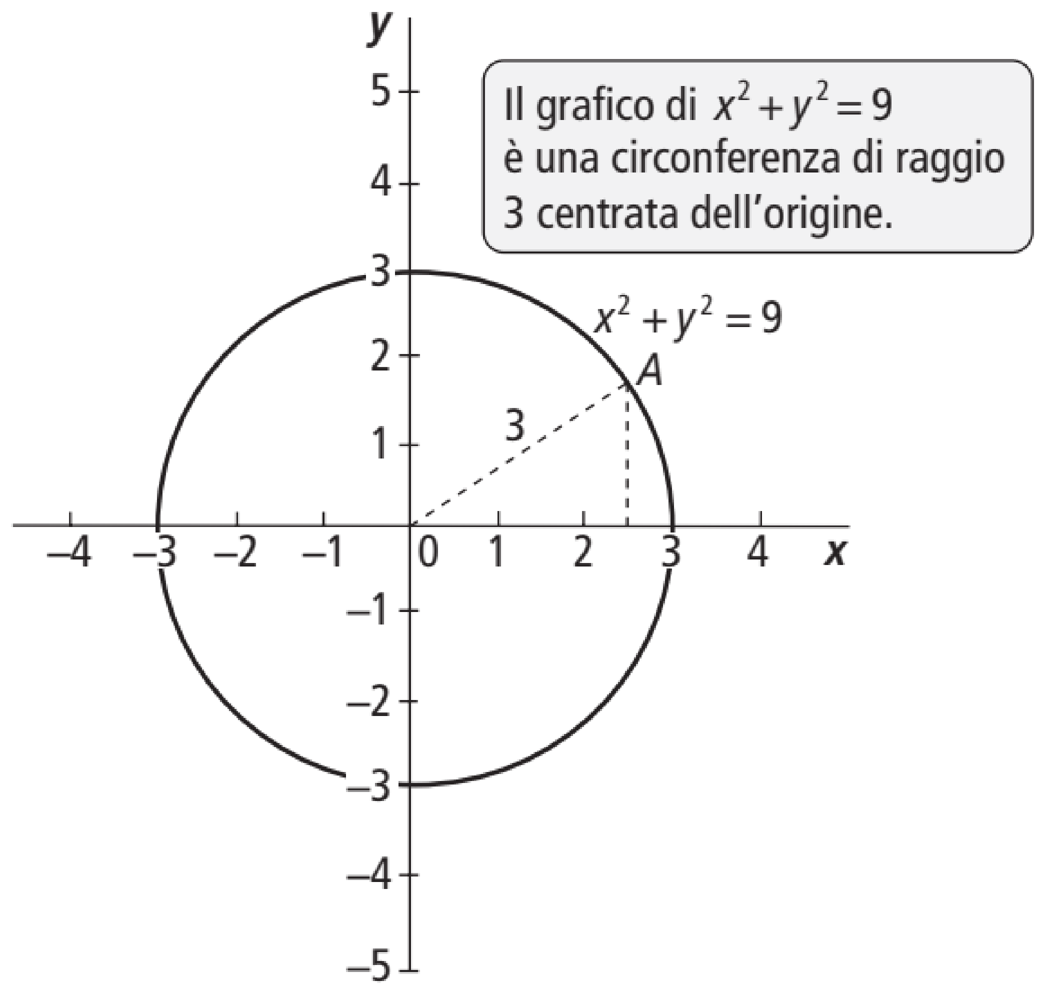


Figura 5.11 Grafico di $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

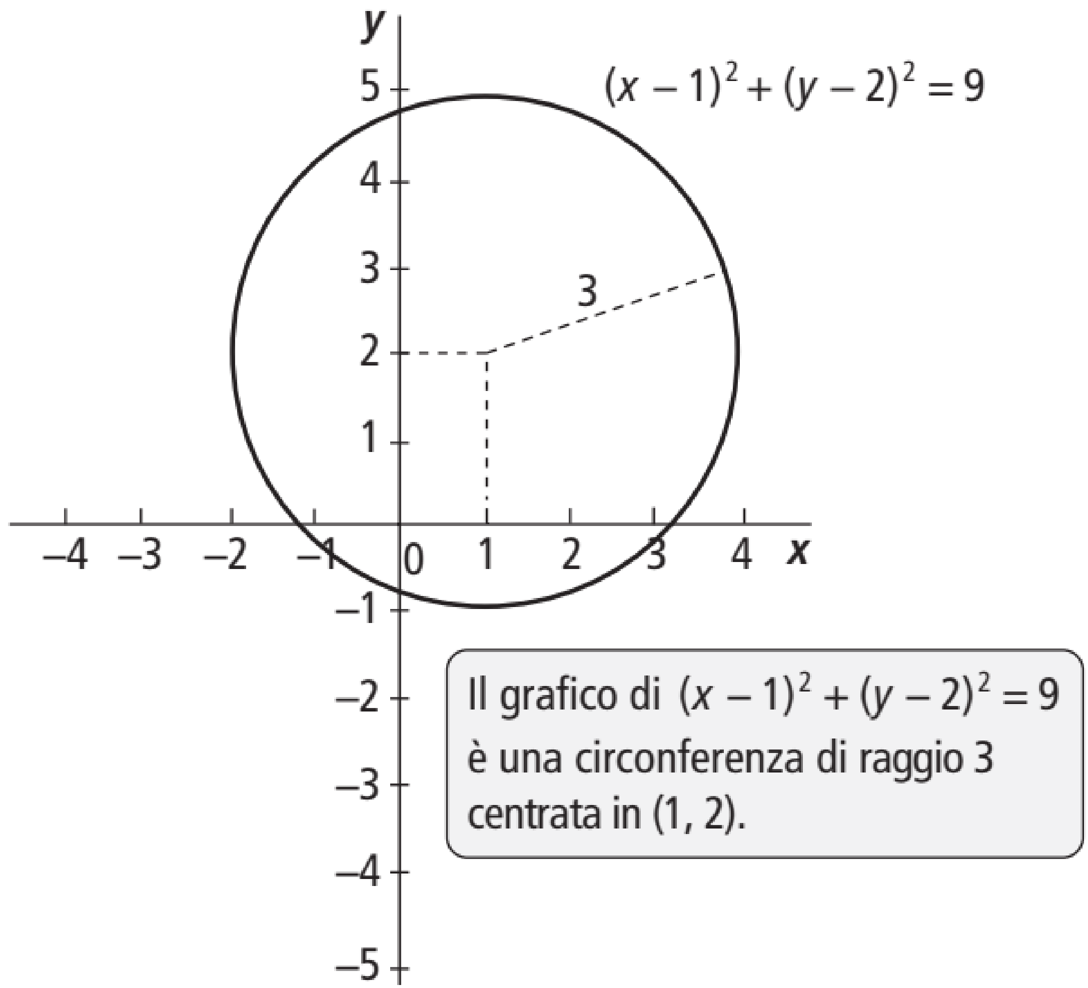
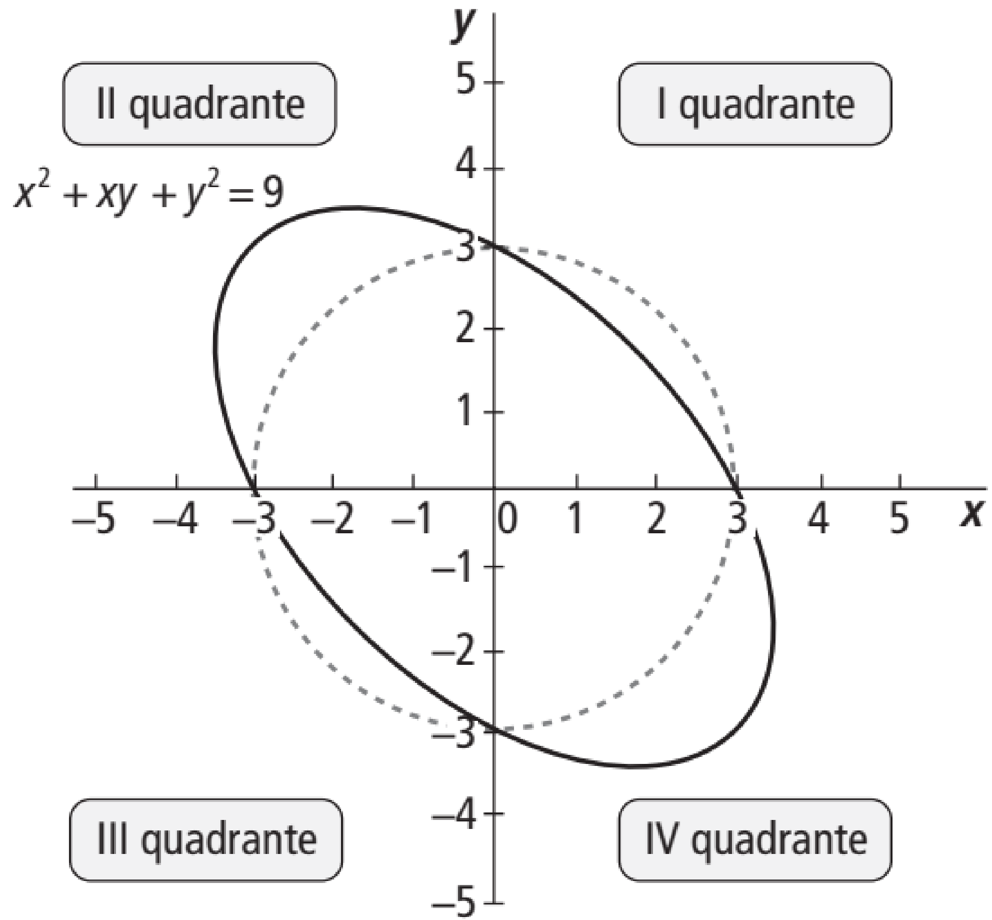


Figura 5.12 Grafico di $x^2 + xy + y^2 = 9$ (in linea continua)



Il grafico di $x^2 + xy + y^2 = 9$ è un'ellisse.

Disuguaglianze e disequazioni

Disuguaglianze e disequazioni

$x > y$ significa *x* maggiore di *y* (disuguaglianza stretta)

$x \geq y$ significa *x* maggiore o uguale a *y* (disuguaglianza debole)

$x < y$ significa *x* minore di *y*

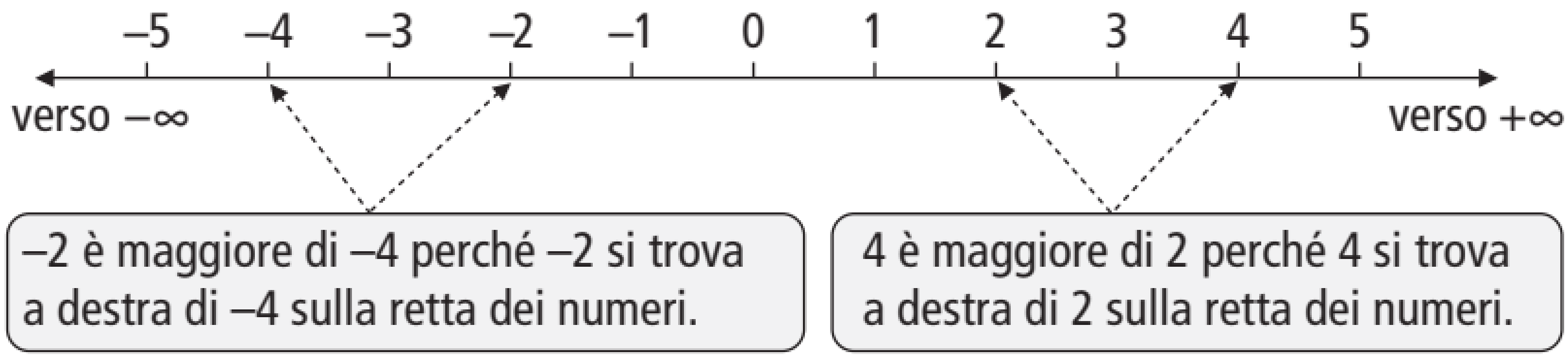
$x \leq y$ significa *x* minore o uguale a *y*

Esistono «disuguaglianze doppie», come $0 < x < 1$

Significato di una disuguaglianza

Fai riferimento alla fig. 5.14, la retta dei numeri.

Figura 5.14 La retta dei numeri



Regole per manipolare le disequazioni

Le disuguaglianze/disequazioni seguono tutte le note regole dell'algebra, eccetto che:

1. Moltiplicare o dividere per un'espressione negativa impone di cambiare il verso della disuguaglianza (Regola 5.1).

Esempio: $-2 > -4$. Moltiplicando ambo i membri per -1 si ottiene: $2 < 4$

2. Quando si prendono i reciproci di entrambi i membri di una disuguaglianza:

– se $A > B$ e A e B hanno segni opposti, allora $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$.

Esempio: $3 > -2$ e $\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$

– se $A > B$ e A e B hanno segni concordi, allora $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$.

Esempio: 3 > 2 ma $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

3. Quando si elevano entrambi i membri a un esponente l’effetto risultante è complicato e si preferisce evitare: in alcuni casi la disequazione può addirittura diventare un’equazione!

Esempio: $2 > -2$ ma $2^2 = (-2)^2$