Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

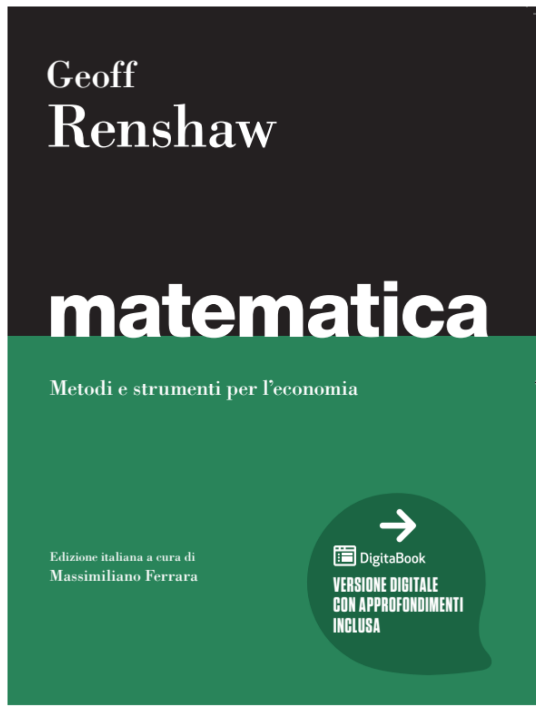
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 1 - Richiami utili di aritmetica



Egea

Addizione e sottrazione di numeri con segno

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ seguito da } + \\ \\ - \text{ seguito da } - \end{array}\right\} \quad \text{si devono addizionare i numeri}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \text{ seguito da } - \\ \\ - \text{ seguito da } + \end{array}\right\} \quad \text{si devono sottrarre i numeri}$$

(Regola 1.1)

Sulla calcolatrice

Usare il tasto (−) per impostare un numero negativo

Moltiplicazione di numeri con segno

$$\left.\begin{array}{l}(+\text{ numero}) \times (+\text{ numero}) \\ \\ (-\text{ numero}) \times (-\text{ numero})\end{array}\right\}\quad \text{il risultato è positivo}$$

$$\left.\begin{array}{l}(+\text{ numero}) \times (-\text{ numero}) \\ \\ (-\text{ numero}) \times (+\text{ numero})\end{array}\right\}\quad \text{il risultato è negativo}$$

(Regola 1.2)

Divisione

Poiché la divisione è l'inverso della moltiplicazione, valgono per essa le stesse regole. (Regola 1.3)

Parentesi e precedenza delle operazioni

P–E–D–M–A–S

Parentesi

Elevamenti a esponente (x^2)

Divisioni

Moltiplicazioni

Addizioni

Sottrazioni (Regola 1.4)

Errore frequente: $\frac{4+3}{2+9}$ significa $\frac{(4+3)}{(2+9)}$, NON $\frac{4}{2}+\frac{3}{9}$

Sviluppo di un'espressione con parentesi

Applicando P-E-D-M-A-S: $3 \times (4 + 5) = 3 \times 9 = 27$

Inoltre: $3 \times (4 + 5) = (3 \times 4) + (3 \times 5) = 12 + 15 = 27$

(Regola 1.5)

Nota che il segno "meno" davanti alle parentesi fa cambiare segno a TUTTI i termini dentro alle parentesi:

$$-(4 + 5) = (-1) \times (4 + 5) = [(-1) \times 4] + [(-1) \times 5] = -4 - 5$$

Fattorizzazione

La fattorizzazione di un'espressione è l'inverso dell'espansione.

Esempio: $12 + 15 = 3 \times (4 + 5)$

Poiché $12 = 3 \times 4$ e $15 = 3 \times 5$, si dice che 3 è un fattore comune di 12 e 15.

Pertanto: $12 + 15 = (3 \times 4) + (3 \times 5) =$

$$= 3 \times (4 + 5)$$

(si tratta dell'inverso dell'espansione della diapositiva precedente)

Frazioni

PROPRIETÀ FONDAMENTALE: moltiplicando/dividendo una frazione per uno stesso numero il valore della frazione non cambia.

$$\frac{12}{15} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4 \times 3 : 3}{5 \times 3 : 3} = \frac{4}{5}$$

Addizione/sottrazione di frazioni: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = ?$

Si deve trovare un denominatore comune. Il metodo più semplice è di moltiplicare numeratore e denominatore di ciascuna frazione per il denominatore dell'altra frazione:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12} \ \text{ e } \ \frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12} \ \text{ da cui } \ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Moltiplicazione e divisione di frazioni

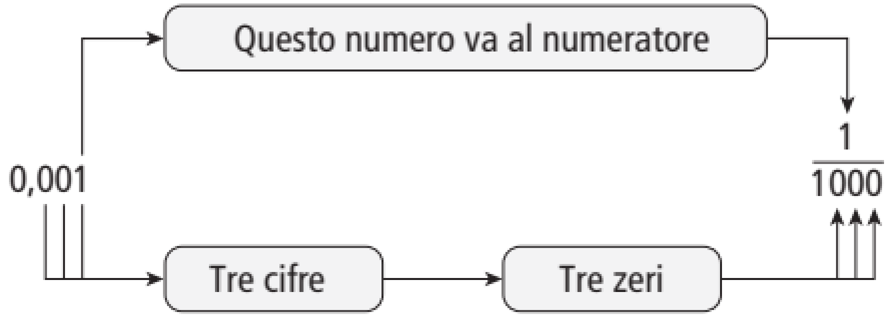
1. Moltiplicazione: $\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{8 \times 5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ (Regola 1.6)

2. «di» significa moltiplicare. Esempio: «metà di 18» significa:

$$18 \times \frac{1}{2} = \frac{18}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

3. Divisione: $10 : 2 = 10 \times \frac{1}{2}$ (entrambi i membri sono uguali a 5). Perciò $10 : \frac{2}{5}$ deve essere uguale a $10 \times \frac{5}{2}$ (Regola 1.7)

Numeri decimali



Un numero decimale è semplicemente una scrittura alternativa per una frazione in cui il denominatore è un multiplo di 10.

Addizione/sottrazione di numeri decimali

Si devono incolonnare le virgole decimali.

Moltiplicazione/divisione di numeri decimali

1. Moltiplicare/dividere un numero decimale per 10, 100, …:

Spostare semplicemente la virgola verso destra (moltiplicazione) o verso sinistra (divisione).

2. Moltiplicare/dividere un numero decimale per un altro:

$$0{,}2 \times 0{,}3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{2 \times 3}{10 \times 10} = \frac{6}{100} = 0{,}06$$

$$\frac{0{,}5}{0{,}02} = \frac{0{,}5 \times 100}{0{,}02 \times 100} = \frac{50}{2} = 25$$

3. Convertire un numero decimale in frazione e viceversa:

$$0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{5 : 5}{100 : 5} = \frac{1}{20} \quad ; \quad \frac{1}{25} = \frac{1 \times 4}{25 \times 4} = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

Rapporti e proporzioni

Esempio: 150 candidati sostengono un esame; 30 vengono respinti.

Rapporto: $\frac{\text{respinti}}{\text{candidati}} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$

Numero di respinti come **proporzione** di tutti i candidati: $\frac{30}{150} = \frac{1}{5}$

Il rapporto e la proporzione sono perciò lo stesso ente: una frazione.

Percentuali (1)

Percentuale: è il numeratore di una frazione in cui il denominatore è 100.

1. Per convertire una frazione in percentuale si moltiplica per 100.

Nell’esempio della diapositiva precedente, la proporzione dei respinti all’esame era $\frac{1}{5}$

La percentuale dei respinti è dunque $\frac{1}{5} \times 100 = \frac{100}{5} = 20\ (\%)$

2. Per convertire una percentuale in frazione si divide per 100.

Percentuali (2)

1. Determinare la percentuale di un numero, per esempio il 5% di 27.

Sappiamo che 5% significa $\frac{5}{100}$ e che «di» significa moltiplicare.

$$\text{Perciò 5\% di } 27 = 27 \times \frac{5}{100} = \frac{135}{100} = 1{,}35$$

2. Aumentare un numero di una data percentuale.

Esempio: aumentare 150 del 20%.

La risposta è data da 150 + 20% di 150 =

= 100% di 150 + 20% di 150 =

= 120% di 150 =

$$= 150 \times \frac{120}{100} = 150 \times 1{,}2 = 180$$

Un errore comune nel calcolo dell'IVA

Supponiamo che l'IVA sia il 20% della somma incassata da un rivenditore e che il prezzo pagato dall'acquirente (comprensivo di IVA) sia € 180. Qual è il prezzo netto applicato dal rivenditore?

Si è tentati di rispondere: 180 meno il 20% di 180, ossia 180 – 36 = 144.

Ma se il prezzo netto fosse 144 l'IVA sarebbe il 20% di 144 = 28,80 e il prezzo ivato sarebbe perciò 144 + 28,80 = 172,80. Il calcolo è errato.

L'errore consiste nell'aver calcolato l'IVA come percentuale del prezzo di acquisto, il quale comprende già l'IVA.

Vedi le Regole 1.13 e 1.14. (Valore esatto: € 150)

Numeri indice

Misurare la crescita % anno su anno di una variabile *Y*

$$\frac{\text{valore di } Y \text{ anno } (t+1) - \text{valore di } Y \text{ anno } t}{\text{valore di } Y \text{ anno } t} \times 100 =$$

$$= \left(\frac{\text{valore di } Y \text{ anno } (t{+}1)}{\text{valore di } Y \text{ anno } t} - 1\right) \times 100$$

(Regola 1.16)

Esempio: $Y_{t+1} = 214,\ Y_t = 200$

$$\left(\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}\right) \times 100 = \left(\frac{214 - 200}{200}\right) \times 100 = 7\ (\%)$$

Potenze e radici

1. Radice quadrata:

Ogni radice quadrata, come $\sqrt{25} = 5$, è per definizione positiva.

Quando però si inverte l'espressione, si ottiene sia $5^2 = 25$ sia $(-5)^2 = 25$.

Ciò vale per ogni radice di indice pari, ma non per le radici di indice dispari:
$\sqrt[3]{125} = 5$ e $5^3 = 125$ ma $(-5)^3 = -125$

2. Elevare una frazione a esponente:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \quad \text{(valore minore).} \quad \text{Nota: } \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

Potenze a esponente negativo

Consideriamo le prime potenze di 2:

$2^1 = 2;\ 2^2 = 2^1 \times 2;\ 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 2;\ \ 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2$

Vediamo che moltiplicando per 2 otteniamo di volta in volta la potenza successiva.
Invertendo il ragionamento, dividendo per 2 otteniamo la potenza precedente:

$$2^4 : 2 = 2^3;\ \ 2^3 : 2 = 2^2;\ \ \ 2^2 : 2 = 2^1;\ 2^1 : 2 = 2^0 = 1$$

Proseguendo, otteniamo:

$$2^0 : 2 = 2^{-1}.\ \text{Ma } 2^0 = 1,\ \text{perciò } 2^0 : 2 = 1 : 2 = \frac{1}{2}.\ \text{Allora } 2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$

Analogamente, $2^{-2} = \frac{1}{2^2};\ \ 2^{-3} = \frac{1}{2^3};\ \ \ 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$; e via dicendo

Potenze e radici sulla calcolatrice

Il tasto ^ permette di elevare a un dato esponente sulla maggior parte delle calcolatrici; su altre si trova il tasto y^x.

Perciò: 4 ^ 2 = 16.

Invertendo l'espressione si ottiene la radice quadrata di 16.

Per calcolarla si preme il tasto 'SHIFT', '2nd F' o 'inv' (a seconda del modello di calcolatrice) seguito da ^ o da $y^{x:}$

2/shift/^/16 = 4

(ossia la radice quadrata di 16 è 4).

Notazione scientifica

Qualsiasi numero può venire scritto come prodotto di un numero compreso fra 1 e 10 e di una potenza di 10 opportuna.

Esempi:

$375 = 3{,}75 \times 10^2$;

$1\,000\,000 = 1 \times 10^6 = 10^6$;

$$\frac{1}{1\,000\,000} = 1 \times 10^{-6} = 10^{-6}$$

Le calcolatrici passano automaticamente alla notazione scientifica quando devono trattare numeri molto grandi o molto piccoli. Prova a digitare in $1 : 1000$.