



Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

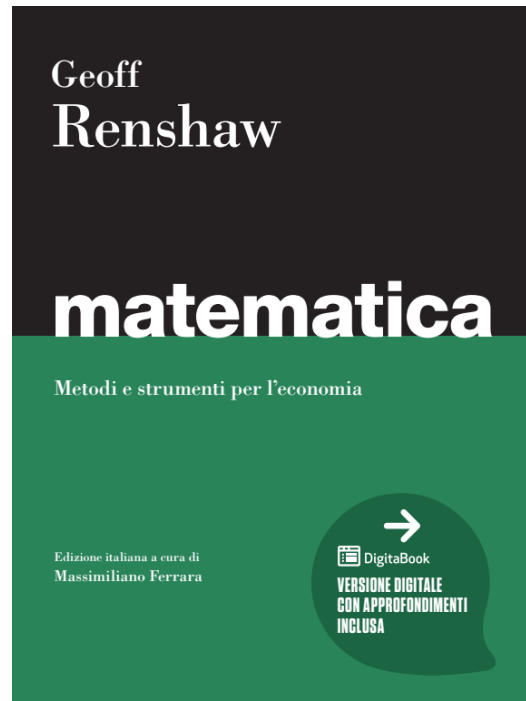
A.A. 2022/2023

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 15 – Algebra delle matrici



 Egea

Definizioni e notazioni

Matrice: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ è di ordine 2×3 (2 righe, 3 colonne)

a_{11}, a_{12}, \dots elementi (il primo pedice indica la riga, il secondo la colonna).

Matrice quadrata: n. di righe = n. di colonne

Matrice nulla: costituita da tutti zero Matrice identità: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vettore riga di ordine 1×4 : $\mathbf{a} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$

Vettore colonna di ordine 3×1 : $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$

Operazioni su matrici e vettori (1)

$$1. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{Trasposta: } \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Ossia le colonne diventano righe e viceversa.

\mathbf{A}' viene anche scritta \mathbf{A}^T

Operazioni su matrici e vettori (2)

2. Addizione/sottrazione di 2 matrici: si addizionano/sottraggono gli elementi corrispondenti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

L'operazione è possibile solo con matrici dello stesso ordine.
Dunque:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \text{ è impossibile}$$

Operazioni su matrici e vettori (3)

3. Moltiplicazione: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ significa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

L'elemento c_{11} di \mathbf{C} si trova moltiplicando ciascun elemento della prima riga di \mathbf{A} per ciascun elemento della prima colonna di \mathbf{B} e poi sommando i risultati.

L'elemento c_{12} di \mathbf{C} si trova moltiplicando ciascun elemento della prima riga di \mathbf{A} per ciascun elemento della seconda colonna di \mathbf{B} e poi sommando i risultati.

E via dicendo.

Operazioni su matrici e vettori (4)

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è possibile solo se il numero di elementi delle righe di \mathbf{A} è uguale al numero di elementi delle colonne di \mathbf{B} . In tal caso \mathbf{A} e \mathbf{B} sono conformabili.

Moltiplicazione a destra o a sinistra:

In $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, \mathbf{B} moltiplica a destra \mathbf{A} . Si scrive \mathbf{AB}

In $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, \mathbf{B} moltiplica a sinistra \mathbf{A} . Si scrive \mathbf{BA}

In generale $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Moltiplicazione di vettori

Moltiplicazione di vettori: se \mathbf{a} è un vettore riga e \mathbf{b} un vettore colonna:

$$\mathbf{ab} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

(il risultato è un numero, detto scalare); invece

$$\mathbf{ba} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}] = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{11}a_{13} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{21}a_{13} \\ b_{31}a_{11} & b_{31}a_{12} & b_{31}a_{13} \end{bmatrix}$$

(il risultato è una matrice 3×3)

Determinanti (1)

Moltiplicazione di una matrice per uno scalare (numero fisso):

$$k\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

La moltiplicazione per k scala ogni elemento di un fattore k .

Determinante di una matrice quadrata

Matrice 2×2 : se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, il determinante di \mathbf{A} , scritto $\det \mathbf{A}$

o $|\mathbf{A}|$, è uguale a $ad - cb$.

Determinanti (2)

Matrice 3×3: se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

il determinante è: $|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{M}_{11}| - a_{12}|\mathbf{M}_{12}| + a_{13}|\mathbf{M}_{13}|$

dove $|\mathbf{M}_{11}|$ è il determinante della sotto-matrice ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna di \mathbf{A} ; ossia:

$$|\mathbf{M}_{11}| = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$|\mathbf{M}_{12}|$ è il determinante della sotto-matrice ottenuta cancellando la prima riga e la seconda colonna di \mathbf{A} , ossia:

$$|\mathbf{M}_{12}| = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

e così via.

Determinanti (3)

Nota che i segni di $|\mathbf{M}_{11}|$, $|\mathbf{M}_{12}|$ ecc. sono + se i pedici hanno per somma un numero pari e – se hanno per somma un numero dispari. Si chiamano minori con segno, o cofattori.

Per calcolare i determinanti di matrici di ordine maggiore conviene usare Microsoft Excel o programmi simili.

Il determinante è definito solo per matrici quadrate.

Inversa di una matrice quadrata (1)

Nell'algebra ordinaria diciamo che y e y^{-1} sono una l'inversa dell'altra perché $y^{-1}y = 1$. Analogamente, in algebra matriciale \mathbf{A}^{-1} e \mathbf{A} sono inverse perché $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} = matrice identità).

Per trovare l'inversa di $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

1. Calcoliamo il determinante $|\mathbf{A}|$ come spiegato poc'anzi. Se è uguale a zero, l'inversa non esiste.

Inversa di una matrice quadrata (2)

2. Troviamo tutti i minori con segno, $|\mathbf{M}_{11}|$, $|\mathbf{M}_{12}|$ ecc., come spiegato.

Dopodiché costruiamo con essi la matrice \mathbf{C} ; la sua trasposta \mathbf{C}' è:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} |\mathbf{M}_{11}| & -|\mathbf{M}_{21}| & |\mathbf{M}_{31}| \\ -|\mathbf{M}_{12}| & |\mathbf{M}_{22}| & -|\mathbf{M}_{32}| \\ |\mathbf{M}_{13}| & -|\mathbf{M}_{23}| & |\mathbf{M}_{33}| \end{bmatrix}$$

3. A questo punto l'inversa di \mathbf{A} è:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{C}' = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} |\mathbf{M}_{11}| & -|\mathbf{M}_{21}| & |\mathbf{M}_{31}| \\ -|\mathbf{M}_{12}| & |\mathbf{M}_{22}| & -|\mathbf{M}_{32}| \\ |\mathbf{M}_{13}| & -|\mathbf{M}_{23}| & |\mathbf{M}_{33}| \end{bmatrix}$$

Se eseguiamo il calcolo di $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ troveremo che è uguale a \mathbf{I} .

Applicazione dell'algebra matriciale

L'algebra matriciale è utile come notazione compatta per i sistemi di equazioni lineari.

Esempio: dato il sistema costituito dalle tre equazioni:

$$4x + y - 5z = 8$$

$$-2x + 3y + z = 12$$

$$3x - y + 4z = 5 \quad (\text{Esempio 15.8})$$

lo possiamo scrivere come $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Possiamo trovare le soluzioni per x , y e z determinando il vettore \mathbf{x} .

Data $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, se moltiplichiamo ambo i membri a sinistra per \mathbf{A}^{-1} otteniamo:

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Poiché $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{Ix}$ e $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, abbiamo $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Usando il metodo spiegato in precedenza:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{C}' = \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ossia, $x = 2$, $y = 5$, $z = 1$ (verifica i calcoli)

Un'applicazione alla macroeconomia

Supponiamo di avere il modello macroeconomico:

$$Y = C + I + G + X - M \quad (\text{condizione di equilibrio})$$

$$C = a(Y - T) + b \quad (\text{funzione di consumo})$$

$$T = tY \quad (\text{gettito fiscale, dove } t = \text{aliquota, } T = \text{gettito})$$

Le incognite sono Y , C e T .

Le variabili esogene sono I , G e $X-M$.

I parametri sono a e b , la pendenza e l'intercetta della funzione di consumo; e l'aliquota, t . (Tuttavia, per ragioni di convenienza consideriamo b come variabile esogena.)

Per risolvere, per prima cosa riscriviamo le equazioni come segue:

$$Y - C = I + G + X - M$$

$$-aY + C + aT = b$$

$$-tY + T = 0$$

Possiamo ora scriverle in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + G + X - M \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo cioè $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T + G + X - M \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota che \mathbf{A} è una matrice di parametri (la propensione marginale al consumo, a , e l'aliquota fiscale, t), \mathbf{x} è un vettore di incognite (Y, C, T) e \mathbf{b} è un vettore di variabili esogene ($I, G, X-M, b$). È uno schema molto comune nei modelli economici.

Data $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, la soluzione rispetto a \mathbf{x} , il vettore colonna delle incognite, è $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Usando il metodo già descritto, troviamo che \mathbf{A}^{-1} è:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1-a(1-t)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ a(1-t) & 1 & -a \\ t & t & 1-a \end{bmatrix} \text{ e perciò } \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \text{ è:}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a(1-t)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ a(1-t) & 1 & -a \\ t & t & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + G + X - M \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora calcolare rapidamente Y , C o T per ogni valore dei parametri e delle variabili esogene.

Analisi input-output

Supponiamo che in un'economia vi siano tre industrie, ciascuna delle quali vende parte del proprio output alle altre due. Possiamo costruire una matrice dei coefficienti di input, \mathbf{A} , in cui a_{12} è il valore delle vendite dell'industria 1 all'industria 2, per consentire a questa di produrre una unità; il termine generale a_{ij} è definito analogamente. Dunque:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se scriviamo i valori degli output totali di ciascuna industria come x_1 , x_2 e x_3 e le vendite ai consumatori finali come c_1 , c_2 e c_3 , allora per l'industria 1 deve valere la seguente identità:

$$x_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + c_1$$

Che possiamo riscrivere come:

$$(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \equiv c_1$$

Le corrispondenti equazioni per le industrie 2 e 3 sono:

$$-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 \equiv c_2$$

e

$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (1 - a_{33})x_3 \equiv c_3$$

Possiamo scrivere queste ultime tre equazioni in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1 - a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{ossia: } (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

dove $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; \mathbf{A} è già stata definita; \mathbf{x} è un vettore di output totali (lordi) delle 3 industrie e \mathbf{c} è un vettore che descrive i consumi finali dei loro output.

La matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è nota come matrice di Leontief.

Data $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c}$, i pianificatori economici possono voler conoscere gli output totali o lordi delle 3 industrie (gli elementi di \mathbf{x}) che soddisfano un dato vettore di domande finali (gli elementi di \mathbf{c}). Per far ciò, possono calcolare l'inversa della matrice di Leontief, $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Si ha allora $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$

Da cui $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$

Questa equazione fornisce \mathbf{x} , il vettore delle produzioni lorde, per un dato vettore di output finali \mathbf{c} .