Ottimizzazione.

Prof. Massimiliano Ferrara

Business Analytics
&
Decision Theory

Definizione

Il proposito è di calcolare massimi e minimi di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Tratteremo due casi:

- *estremi liberi o non vincolati: massimi e minimi di* f *appartenenti a un insieme aperto* D*;*
- *estremi vincolati: massimi e minimi di* f *appartenenti a un insieme chiuso* D *in cui considerare il fatto che possano appartenere alla frontiera* ∂D.

Estremi di una funzione in $\mathbb{R}$ e in suo intervallo chiuso

Esempio

1. *Trovare gli estremi di* $f(x) = x^2$ *per* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Trovare gli estremi di* $f(x) = x^2$ *per* $x \in [-1, 1]$.

Svolgimento.

1. *Si calcola* $f'(x) = 2x$*, si guarda quando* $f'(x) = 0$ *e si deduce che* $x = 0$ *è un punto estremo. Di seguito si studia la natura del punto estremo.*
2. *Si calcolano i punti estremi interni all'intervallo, poi si valuta la funzione* f *nei punti estremi e nei punti del bordo, e si deducono i valori massimi e minimi assoluti. Quindi* $f(\pm 1) = 1$ *e* $f(0) = 0$*, da cui* ± 1 *son massimi assoluti e* 0 *minimo assoluto.*

Estremi liberi di una funzione in due variabili

Definizione

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Un punto $\mathbf{x_0} \in D$, si dice

- *massimo locale o relativo se esiste un intorno $B_r(\mathbf{x_0})$ tale che $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0}) \cap D$;*
- *minimo locale o relativo se esiste un intorno $B_r(\mathbf{x_0})$ tale che $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0}) \cap D$;*
- *massimo locale o relativo stretto se esiste un intorno $B_r(\mathbf{x_0})$ tale che $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0}) \cap D$;*
- *minimo locale o relativo stretto se esiste un intorno $B_r(\mathbf{x_0})$ tale che $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0}) \cap D$;*
- *massimo assoluto o globale se $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in D$;*
- *minimo assoluto o globale se $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in D$;*
- *massimo assoluto o globale stretto se $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in D$;*
- *minimo assoluto o globale stretto se $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x_0})$ per ogni $\mathbf{x} \in D$;*
- *punto di estremo se di minimo o massimo relativo, mentre $f(\mathbf{x_0})$ si dice estremo.*

Estremi liberi

Si parla di calcolo degli estremi liberi quando si vogliano individuare punti di estremi interni al dominio.
Una condizione necessaria per punti estremi liberi è la seguente

Teorema (Fermat)

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D aperto. Se

- *il punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0) \in D$ è un estremo locale in D,*
- *la funzione f è derivabile in (x_0, y_0)*

allora $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ cioè

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \; f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Tale punto $\mathbf{P}$ si dice punto stazionario o critico.

Estremi liberi: esempio 1

Esempio

Calcolare i punti critici di $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Svolgimento.

Da

- $f_x(x, y) = 2x$,
- $f_y(x, y) = 2y$,

ed essendo

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

deducíamo che l'origine è l'unico punto critico di f.

Da $f(0, 0) = 0$ *e* $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$, *deduciamo che* $\mathbf{P} = (0, 0)$ *è un minimo assoluto.*

Estremi liberi: esempio 1

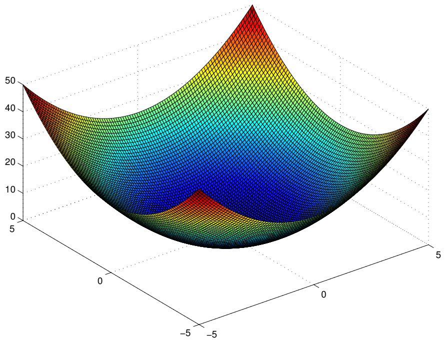


Figura : La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ in un intorno dell'origine. Si noti il minimo assoluto in $(0,0)$.

Estremi liberi: esempio 2

Esempio

Calcolare i punti critici di $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Svolgimento.

Da

- $f_x(x,y) = 2x$,
- $f_y(x,y) = -2y$,

ed essendo

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

deduciamo che l'origine è l'unico punto critico di f.
Poichè $f(0,0) = 0$ *e*

- *sulla retta* $x = 0$ *si ha* $f(x,y) = x^2 \geq 0$, *il punto* $(0,0)$ *è un minimo assoluto sulla retta* $x = 0$,
- *sulla retta* $y = 0$ *si ha* $f(x,y) = -y^2 \leq 0$, *il punto* $(0,0)$ *è un massimo assoluto sulla retta* $y = 0$,

deduciamo che $\mathbf{P} = (0,0)$ *non è un massimo e nemmeno un minimo. Un punto critico di questo tipo si dice di sella.*

Estremi liberi: esempio 2

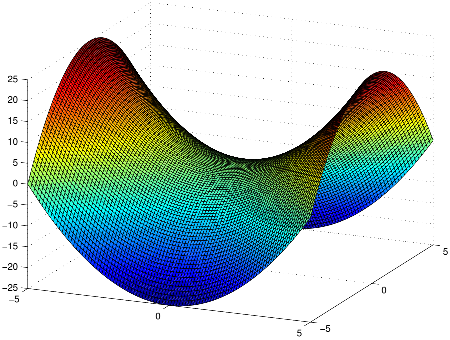


Figura : La funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ in un intorno dell'origine. Si noti il punto di sella in $(0, 0)$, che non essendo un massimo o un minimo non è un punto estremo.

Punto di sella

Definizione (Punto di sella)

Un punto $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ *è di* *sella* *se*

- *è un punto critico per* f *(cioè* $\nabla f(x_0, y_0) = 0$*);*
- *non esiste alcun intorno (sferico) di* $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ *nel quale* $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ *sia un punto di massimo o di minimo.*

Estremi liberi: esempio ulteriore

Esempio

Calcolare i punti critici di $f(x, y) = \sin(x \cdot y)$.

Svolgimento.

Da

- $f_x(x, y) = y \cdot \cos(x \cdot y)$,
- $f_y(x, y) = x \cdot \cos(x \cdot y)$,

ed essendo

$$\nabla f(x, y) = (y \cdot \cos(x \cdot y), x \cdot \cos(x \cdot y)) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ o } \cos(x \cdot y) = 0$$

deduciamo che sono punti critici

- *l'origine* $(x, y) = (0, 0)$,
- *tutti i punti* (x, y) *tali che* $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

Estremi liberi: esempio ulteriore

Svolgimento.

Poichè $f(0,0) = 0$ *e*

- *sulla retta* $x = y$ *si ha* $f(x,y) = \sin(y \cdot y) \geq 0$ *in un intorno di* $(0,0)$, *il punto* $(0,0)$ *è un minimo assoluto sulla retta* $y = x$,
- *sulla retta* $x = -y$ *si ha* $f(x,y) = \sin(-y \cdot y) \leq 0$, *il punto* $(0,0)$ *è un massimo assoluto sulla retta* $y = 0$,

deduciamo che $\mathbf{P} = (0,0)$ *non è un massimo e nemmeno un minimo e quindi di sella.*

Per tutti i punti $\mathbf{Q}_k(x) = (x, \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{x})$ *con* $k \in \mathbb{Z}$ *abbiamo*

$$f(\mathbf{Q}_k(x)) = \sin(xy) = \sin(\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{x}) = \begin{cases} +1, & k \text{ pari} \\ -1, & k \text{ dispari} \end{cases}$$

e quindi visto che $\sin(xy) \in [-1,1]$ *deduciamo che* $\mathbf{Q}_k(x)$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *è un massimo per* k *pari, minimo per* k *dispari.*

Estremi liberi: esempio ulteriore

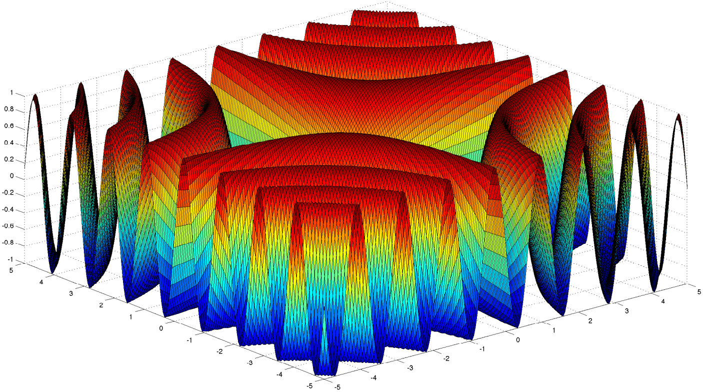


Figura : La funzione $f(x, y) = \sin(xy)$ in un intorno dell'origine. Si notino i punti di massimo e minimo.

Estremi liberi: matrice Hessiana

In questa parte studiamo la natura dei punti stazionari e l'importanza delle derivate del second'ordine.

Ricordiamo che in una variabile, se

- $f'(x_0) = 0$ e $f^{(2)}(x_0) < 0$ abbiamo un punto di massimo,
- $f'(x_0) = 0$ e $f^{(2)}(x_0) > 0$ abbiamo un punto di minimo.

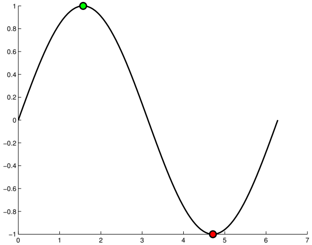


Figura : La funzione $f(x) = \sin(x)$ in $[0, 2\pi]$. Si notino il punto di massimo (in verde) e minimo (in rosso), relativamente al segno della derivata seconda.

Estremi liberi: matrice Hessiana

Definizione

Sia $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto,* $\mathbf{x_0} \in \mathbf{D}$. *La matrice*

$$D_f^2(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{x_0}) & f_{xy}(\mathbf{x_0}) \\ f_{yx}(\mathbf{x_0}) & f_{yy}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$

si chiama matrice hessiana di f *in* $\mathbf{x_0}$.

Nota.

Se $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto,* $\mathbf{x_0} \in \mathbf{D}$, *dal teorema di Schwarz sappiamo che*

$$f_{xy}(\mathbf{x_0}) = f_{yx}(\mathbf{x_0}).$$

La matrice Hessiana $D_f^2(\mathbf{x_0})$ *ha quindi la forma*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ed in algebra lineare si dice essere una matrice 2×2 *simmetrica.*

Classificazione matrici simmetriche

Definizione

Siano

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = ac - b^2.$$

- *Se* $a > 0$, $\det(M) > 0$ *allora* M *si dice definita positiva e si scrive* $M > 0$;
- *Se* $a < 0$, $\det(M) > 0$ *allora* M *si dice definita negativa e si scrive* $M < 0$;
- *Se* $\det(M) = 0$ *allora* M *si dice semi-definita*;
- *Se* $\det(M) < 0$ *allora* M *si dice indefinita*.

Classificazione matrici simmetriche, esempi

Esempio (Definita positiva)

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è tale che

- $\det(M) = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2 > 0;$
- $a = 3 > 0$

e quindi è definita positiva.

Esempio (Definita negativa)

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

è tale che

- $\det(M) = (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = 6 - 1 = -5 > 0,$
- $a = -2 < 0$

e quindi è definita negativa.

Classificazione matrici simmetriche, esempi

Esempio (Semidefinita)

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è tale che

$$\det(M) = 2 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

quindi è semidefinita.

Esempio (Indefinita)

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

è tale che

$$\det(M) = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 < 0$$

e quindi è indefinita.

Estremi liberi: matrice Hessiana

Sia $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ *punto critico per* f, *cioè* $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. *Sia*

$$D_f^2(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana di f *in* $\mathbf{P}$ *e*

$$\det(D_f^2(x_0, y_0)) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{yx}(x_0, y_0) f_{xy}(x_0, y_0).$$

- *Se* $\det(D_f^2(x_0, y_0)) > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, *cioè* $D_f^2 > 0$, *allora* $\mathbf{P}$ *è un punto di minimo locale stretto.*
- *Se* $\det(D_f^2(x_0, y_0)) > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, *cioè* $D_f^2 > 0$, *allora* $\mathbf{P}$ *è un punto di massimo locale stretto.*
- *Se* $\det(D_f^2(x_0, y_0)) < 0$ *allora* $\mathbf{P}$ *è un punto di sella.*
- *Se* $\det(D_f^2(x_0, y_0)) = 0$ *allora serve una analisi ulteriore.*

Estremi liberi: esempio 1

Esempio

Determinare, se possibile, la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^2 + y^2$ *mediante la matrice Hessiana.*

Svolgimento.

Da

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y$$

abbiamo visto che $(x,y) = (0,0)$ *è l'unico punto critico di* f *e dedotto da* $f(x,y) \geq 0$ *che è un minimo assoluto.*

Da

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yx}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 2$$

la matrice Hessiana è

$$D_f^2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e da $a = 2$, $\det(D_f^2(0,0)) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$ *deduciamo nuovamente che è un minimo.*

Estremi liberi: esempio 2

Esempio

Determinare, se possibile, la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^2 - y^2$ *mediante la matrice Hessiana.*

Svolgimento.

Da

$$f_x(x,y) = 2x, \, f_y(x,y) = -2y$$

abbiamo visto che $(0,0)$ *è l'unico punto critico e con una analisi ulteriore è di sella.*

Da

$$f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yx}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = -2$$

la matrice Hessiana è

$$D_f^2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e da $\det(D_f^2(0,0)) = 2 \cdot -2 - 0 \cdot 0 = -4 < 0$ *deduciamo nuovamente che è un punto di sella.*

Estremi liberi: esempio 3

Esempio

Determinare, se possibile, la natura dei punti critici di $f(x, y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + y^2$ *mediante la matrice Hessiana.*

Svolgimento.

Per prima cosa studiamo i punti critici. Da

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4x = 4x \cdot (x^2 - 1), f_y(x, y) = 3y^2 + 2y = y(3y + 2)$$

osserviamo che i punti stazionari, cioè tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$*, sono tutti e soli i punti per cui*

$$\begin{cases} 4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \\ y \cdot (3y + 2) = 0. \end{cases}$$

- *la prima equazione ha soluzioni* $x = 0$, $x = \pm 1$,
- *la seconda equazione ha soluzioni* $y = 0$, $y = -2/3$.

Di conseguenza i 6 punti stazionari sono $(0, 0)$, $(0, -2/3)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, -2/3)$.

Estremi liberi: esempio 3

Da

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4x = 4x \cdot (x^2 - 1), f_y(x,y) = 3y^2 + 2y = y(3y+2)$$

ricaviamo

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yx}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 6y + 2$$

la matrice Hessiana è

$$D_f^2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y+2 \end{pmatrix}.$$

e quindi

- $a = a(x,y) = 12x^2 - 4,$
- $\det(D_f^2(x,y)) = (12x^2 - 4) \cdot (6y+2).$

Estremi liberi: esempio 3

Analizziamo i 6 punti stazionari sono $(0,0)$, $(0,-2/3)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, -2/3)$. *Ricordiamo che*

- $a = a(x,y) = 12 \cdot x^2 - 4$,
- $\det(D_f^2(x,y)) = (12x^2 - 4) \cdot (6y + 2)$.

Così

- *da* $a(0,0) = -4$, $\det(D_f^2(0,0)) = -8$ *deduciamo che l'Hessiana è indefinita e il punto* $(0,0)$ *è di sella.*
- *da* $a(0,-2/3) = -4$, $\det(D_f^2(0,-2/3)) = 8$ *deduciamo che l'Hessiana è definita negativa e il punto* $(0,-2/3)$ *è un massimo.*
- *da* $a(\pm 1, 0) = 8$, $\det(D_f^2(\pm 1, 0)) = 16$ *deduciamo che l'Hessiana è definita positiva e il punto* $(\pm 1, 0)$ *è un minimo.*
- *da* $a(\pm 1, -2/3) = 8$, $\det(D_f^2(\pm 1, -2/3)) = -16$ *deduciamo che l'Hessiana è indefinita e il punto* $(\pm 1, -2/3)$ *è un punto di sella.*

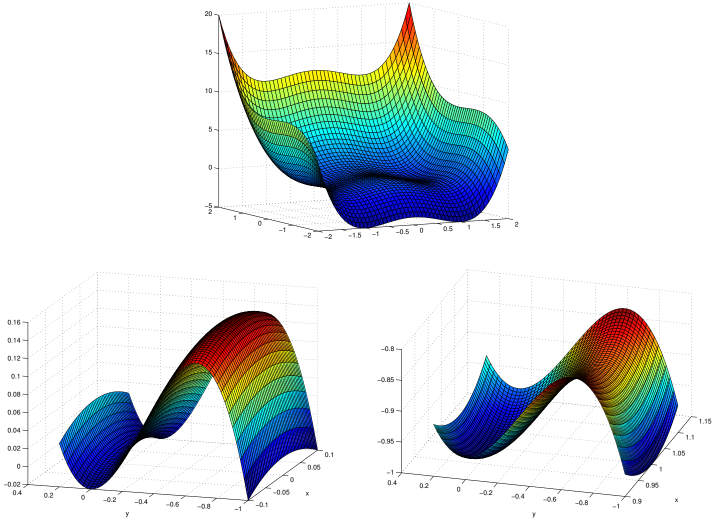


Figura : La funzione $f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2 + y^2$ in alcuni intorni dei punti critici.

Esercizio per casa

Esercizio

Determinare, se possibile, la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + x + y^3 + 2y^2 + y$ *mediante la matrice Hessiana.*

Si verifica che

- $(-1/3, -1/3)$ *è un minimo,*
- $(-1, -1/3)$ *è un punto di sella,*
- $(-1/3, -1)$ *è un punto di sella,*
- $(-1, -1)$ *è un massimo.*

Esercizio

Determinare, se possibile, la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy - y$ *mediante la matrice Hessiana.*

Estremi vincolati

Proposito: *calcolare i massimi e minimi relativi (locali) di* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *con* D *dominio, se* $g(x, y) = 0$ *(equazione del vincolo),*

ovvero

determinare i punti $(x, y) \in D$ *tali che si realizza*

$$\begin{cases} \max_{(x,y)\in D} f(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \min_{(x,y)\in D} f(C, L) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Esempio

Siano

- C *il capitale e* L *il lavoro, con* $C + L$ *budget disponibile,*
- $f(C, L)$ *la produzione.*

Determinare

$$\begin{cases} \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) \\ C + L - 100 = 0 \end{cases}$$

Estremi vincolati

Primo caso: *il vincolo è esplicitabile cioè una variabile si può scrivere in funzione dell'altra.*

In questo caso il problema si riconduce a quello di risolvere un problema di massimo/minimo, o più in generale i punti estremi, di una funzione definita in un intervallo.

Esempio

Determinare i punti estremi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

con il vincolo

$$y = x, \quad x \in [0, 1].$$

Svolgimento.

Da $y = x$, la funzione ristretta al vincolo è

$$f|_{vincolo}(x, y) = x^2 + x^2 + x \cdot x = 3x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Non è difficile vedere che tale funzione ha un minimo assoluto in $x = 0$ e massimo assoluto in $x = 1$. Di conseguenza $(0, 0)$ è un minimo assoluto, $(1, 1)$ è un massimo assoluto.

Estremi vincolati

In altri termini, se il vincolo è esplicitabile

- $y = h(x)$ *e quindi si studiano i punti estremi di*

$$f|_{vincolo}(x, y) = f(x, h(x)), \quad x \in D$$

oppure

- $x = h(y)$ *e quindi si studiano i punti estremi di*

$$f|_{vincolo}(x, y) = f(h(y), y), \quad y \in D.$$

Estremi vincolati

Secondo caso: *il vincolo non è esplicitabile.*

In questo caso il problema si studia mediante una tecnica detta dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio

Determinare i punti estremi della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

con il vincolo

$$e^{xy} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 \cdot y = 0$$

Nota.

Osserviamo che il vincolo

$$e^{xy} + \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 \cdot y = 0$$

non si scrive direttamente come $y = h(x)$ oppure $x = h(y)$.

Estremi vincolati

Teorema (Weierstrass)

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato. Inoltre sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ha almeno un massimo assoluto e un minimo assoluto.

Nota.

Si dimostra che se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua allora

$$C = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

è un insieme chiuso.

Se inoltre C è limitato, dal teorema di Weierstrass, siamo sicuri che esistono massimi e minimi assoluti per il problema vincolato.

Estremi vincolati

Definizione (Massimo vincolato)

Un punto (x_0, y_0) *è di massimo (locale) di* f *vincolato a* $g(x, y) = 0$, *se esiste un intorno* U *di* (x_0, y_0) *tale che*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in U \cap \{(x, y) : g(x, y) = 0\}.$$

Definizione (Minimo vincolato)

Un punto (x_0, y_0) *è di minimo (locale) di* f *vincolato a* $g(x, y) = 0$, *se esiste un intorno* U *di* (x_0, y_0) *tale che*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in U \cap \{(x, y) : g(x, y) = 0\}.$$

Estremi vincolati

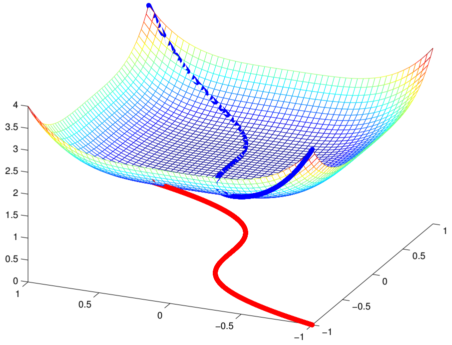


Figura : La funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2$. In rosso la curva $y - x^3 = 0$, in blue i valori di f nei punti della curva con $x \in [-1, 1]$. Nel problema vincolato, si tratta di trovare i punti estremi in tale grafico in blue.

Punti regolari

Definizione (Punto regolare)

Un punto (x_0, y_0) è di regolare per il vincolo $g(x, y) = 0$, se

- $g(x_0, y_0) = 0$;
- $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$.

Esempio

Sia $g(x, y) = y - x$, con $x \in [0, 1]$. Il vincolo rappresenta i punti della bisettrice $y = x$ con $x \in [0, 1]$. Poichè $\nabla g(x, y) = (-1, 1)$, tutti i punti del vincolo sono regolari.

Esempio

Sia $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Il vincolo rappresenta i punti del cerchio centrato nell'origine e avente raggio 1. Poichè $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, tutti i punti del vincolo sono regolari (si noti che $g(0, 0) = -1$ e quindi $(0, 0)$ non fa parte del vincolo).

Punti regolari

Teorema (Moltiplicatori di Lagrange)

Siano

- $f, g \in C^1(D)$, *con* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *aperto;*
- $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in X$ *un punto regolare di* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = c\}$.

Allora (x_0, y_0) *è un estremo vincolato di* f *vincolato a* C *se e solo se esiste* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

In tal caso λ *si dice moltiplicatore di Lagrange.*

Esercizio 1 moltiplicatori di Lagrange

Esempio

Si calcolino gli estremi della funzione

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

col vincolo

$$g(x,y) := x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Svolgimento.

Osserviamo per prima cosa che il vincolo è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *e quindi un ellisse con semiassi* 1 *e* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

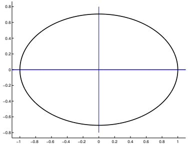


Figura : L'ellisse di vincolo.

Esercizio 1 moltiplicatori di Lagrange

- *Vediamo se i punti del vincolo sono regolari.*
  Da $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$*, ricaviamo che* $\nabla g(x,y) = (2x, 4y)$ *che sia annulla solo in* $(0,0)$ *che però non fa parte del vincolo. Di conseguenza tutti i punti sono regolari.*
- *Moltiplicatori di Lagrange.*
  Sia

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = (x+y)^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1).$$

I punti estremi (x,y) *verificano per qualche* λ *il sistema*

$$\begin{cases} \nabla F(x,y,\lambda) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y) - \lambda \cdot (2x) = 0 \\ 2(x+y) - \lambda \cdot (4y) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 1 moltiplicatori di Lagrange

- *Da*

$$\begin{cases} 2(x+y) - \lambda \cdot (2x) = 0 \\ 2(x+y) - \lambda \cdot (4y) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1, \end{cases}$$

sottraendo la seconda equazione alla prima, ricaviamo $-\lambda(2x) + \lambda(4y) = -2\lambda(x-2y) = 0$ *cioè* $x = 2y$ *oppure* $\lambda = 0$.

  - *se* $\lambda = 0$, *dalle prime due equazioni abbiamo che* $x + y = 0$ *ecioè* $x = -y$; *dalla terza equazione* $x^2 + 2y^2 = 1$ *abbiamo* $3y^2 = 1$ *da cui* $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ *(e quindi* $x = -y = -\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$*) e i punti estremi calcolati* $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}})$;
  - *se* $x = 2y$, *dalla terza equazione* $x^2 + 2y^2 = 1$ *ricaviamo* $6y^2 = 1$ *cioè* $y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ *(e quindi* $x = 2y = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$*) e i punti estremi calcolati* $P_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $P_4 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Esercizio 1 moltiplicatori di Lagrange

- *Valutazione massimi e minimi assoluti.*
  Da
  $$P_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}), P_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), P_4 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$
  con facili calcoli si vede che
  - $f(P_1) = 0$;
  - $f(P_2) = 0$;
  - $f(P_3) = 3/2$;
  - $f(P_4) = 3/2$;

  Così P_1, P_2 sono minimi, mentre P_3, P_4 sono massimi.

Esercizio 1 moltiplicatori di Lagrange

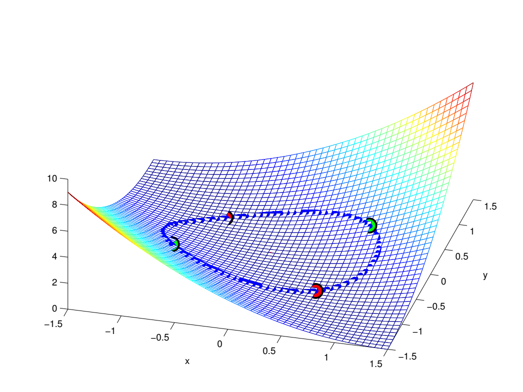


Figura : La funzione f in un intorno dell'origine. In blue il valore nell'ellisse di vincolo. In rosso i minimi e in verde i massimi.

Esercizio 2 moltiplicatori di Lagrange

Esempio

Si calcolino gli estremi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

col vincolo

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Svolgimento.

Osserviamo per prima cosa che il vincolo è del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a = 1$*,* $b = 1$*, e quindi un cerchio con centro l'origine e raggio 1.*

Esercizio 2 moltiplicatori di Lagrange

1.Metodo diretto

Osserviamo che da $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *(cioè* $x^2 + y^2 = 1$*), se* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$*, e* $(x, y) \in C$

$$f|_C(x, y) = x^2 + 4y^2 = (x^2 + y^2) + 3y^2 = 1 + 3y^2.$$

Poichè

- $y \in [-1, 1]$ *(il vincolo è il cerchio di centro* $(0, 0)$ *e raggio 1!),*
- $f|_C(x, y) = 1 + 3y^2$ *ha in* $[-1, 1]$ *minimo in* $y = 0$ *e massimo in* $y = \pm 1$

deduciamo che la funzione $f|_C(x, y)$ *ha*

- *minimi in* $(\pm 1, 0)$*,*
- *massimi in* $(0, \pm 1)$*.*

2.Metodo moltiplicatori di Lagrange

- *Vediamo se i punti del vincolo sono regolari.*
  Da $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$*, ricaviamo che* $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ *che sia annulla solo in* $(0, 0)$ *che però non fa parte del vincolo. Di conseguenza tutti i punti sono regolari.*
- *Moltiplicatori di Lagrange.*
  Sia

  $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) = x^2 + 4y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

  I punti estremi (x, y) *verificano per qualche* λ *il sistema*

  $$\begin{cases} \nabla F(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda \cdot (2x) = 0 \\ 8y - \lambda \cdot (2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \lambda) = 0 \\ y(4 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2 moltiplicatori di Lagrange

- *Determinazione punti estremi. Da*

$$\begin{cases} x(1-\lambda)=0 \\ y(4-\lambda)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

  - *Se* $\lambda = 1$*, allora la prima equazione è risolta per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e dalla seconda equazione necessariamente* $y = 0$*. Dovendo essere risolta l'equazione* $x^2 + y^2 = 1$*, necessariamente* $x = \pm 1$*. Così i punti estremi sono* $(\pm 1, 0)$*.*
  - *Se* $x = 0$ *allora la prima equazione è risolta. Perchè sia verificata la seconda equazione*
    - *o* $y = 0$ *(da scartare perchè* $(0, 0)$ *non verifica la terza equazione* $x^2 + y^2 = 1$*);*
    - *o* $\lambda = 4$ *e la seconda equazione è risolta per qualsiasi* $y \in \mathbb{R}$ *e quindi affinchè* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x = 0$*, necessariamente* $y = \pm 1$*.*

  Così i punti estremi calcolati sono $(0, \pm 1)$*.*

Esercizio 2 moltiplicatori di Lagrange

- *Valutazione massimi e minimi assoluti.*
  Da
  $$P_1 = (1, 0), P_2 = (-1, 0), P_3 = (0, 1), P_4 = (0, -1)$$
  con facili calcoli si vede che essendo $f(x, y) = x^2 + 4y^2$
  - $f(P_1) = 1;$
  - $f(P_2) = 1;$
  - $f(P_3) = 4;$
  - $f(P_4) = 4;$

  Così P_1, P_2 *sono minimi, mentre* P_3, P_4 *sono massimi.*

Esercizio 2 moltiplicatori di Lagrange

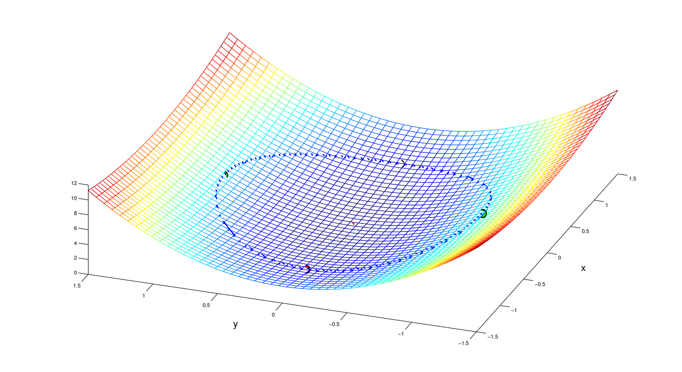


Figura : La funzione f in un intorno dell'origine. In blue il valore nell'ellisse di vincolo. In rosso i minimi e in verde i massimi.

Esercizio 1 moltiplicatori di Lagrange

Esempio

Fra tutti i rettangoli con lati lunghi x e y e perimetro fissato $2A$, trovare quello di area massima. In altri termini si calcolino i massimi della funzione

$$f(x,y) = xy$$

col vincolo

$$g(x,y) := x + y - A = 0$$

Svolgimento.

Osserviamo per prima cosa che il vincolo è del tipo

$$x + y - A = 0$$

con $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Esercizio 3 moltiplicatori di Lagrange

1.Metodo diretto

Osserviamo che da $x + y - A = 0$, $x, y \in [0, A]$, *se* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = A\}$, *e* $(x, y) \in C$

$$f|_C(x, y) = xy = x(A - x)$$

Poichè

- $x \in [0, A]$
- $f|_C(x, y) = x(A - x)$ *ha in* $[0, A]$ *estremi nei punti in cui* $f|_C'(x, y) = -2x + A = 0$, *cioè* $x = A/2$ *oppure* $x = 0$ *oppure* $x = A$. *Valutando la funzione si vede che* $x = A/2$ *è un massimo, mentre* $x = 0$, $x = A$ *minimi. Così , da* $x + y = A$, *cioè* $y = A - x$
  - $(A/2, A/2)$ *è un massimo,*
  - $(A, 0)$, $(0, A)$ *sono minimi.*

Esercizio 3 moltiplicatori di Lagrange

2.Metodo moltiplicatori di Lagrange

- *Vediamo se i punti del vincolo sono regolari.*
  Da $g(x,y) = x + y - A$, *ricaviamo che* $\nabla g(x,y) = (1,1) \neq (0,0)$. *Di conseguenza tutti i punti sono regolari.*
- *Moltiplicatori di Lagrange.*
  Sia
  $$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = xy - \lambda(x + y - A).$$
  I punti estremi (x,y) *verificano per qualche* λ *il sistema*
  $$\begin{cases} \nabla F(x,y,\lambda) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ x + y - A = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3 moltiplicatori di Lagrange

- *Determinazione punti estremi.* *Da*

$$\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ x + y - A = 0 \end{cases}$$

deduciamo che $x = y = \lambda$ *e da* $x + y - A = 0$ *necessariamente* $2x = A$, *cioè* $(A/2, A/2)$ *è un estremo (massimo!).*

Gli altri punti estremi sono dovuti al fatto che $x, y \in [0, A]$ *(e non generici in* $\mathbb{R}$*!) e quindi* $(0, A)$, $(A, 0)$, *che si verifica immediatamente essere minimi.*

Esercizio 3 moltiplicatori di Lagrange

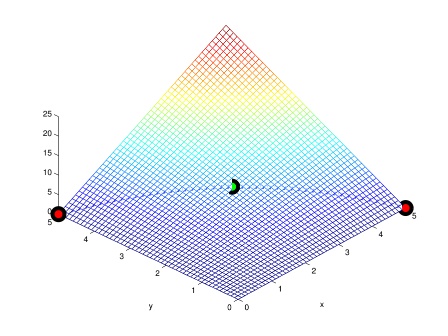


Figura : La funzione f in un intorno dell'origine, con $A = 5$. In blue il valore nel vincolo. In rosso i minimi e in verde i massimi.

Esercizio per casa, moltiplicatori di Lagrange

Esercizio

Trovare tutti i punti della curva $xy = 1$ più vicini all'origine.

Traccia.

Si verifica che si deve minimizzare la funzione $f^*(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *col vincolo* $g(x, y) = xy - 1 = 0$. *Poichè un punto è di minimo di* $f^* \geq 0$ *se e solo se è di minimo di* $f = (f^*)^2$, *basta calcolare il minimo di*

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Visto che il vincolo comporta che $y = 1/x$, *basta calcolare il minimo di*

$$f_C(x, y) = x^2 + y^2 = x^2 + (1/x)^2 = \frac{x^4 + 1}{x^2}.$$

Dopo facili conti si vede che

$$f_C'(x, y) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

che si annulla solo in $x = \pm 1$. *Dovendo essere* $y = 1/x$, *abbiamo che* $y = \pm 1$. *Quindi i minimi cercati sono* $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto

Problema.

Di seguito intendiamo calcolare i punti (x, y) estremi di una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $(x, y) \in A$, dove

$$A = int(A) \cup \partial A$$

in cui

- *$int(A)$ è l'interno di A,*
- *∂A la frontiera di A.*

Di seguito supponiamo $int(A)$ sia non vuoto.

- *calcolo i punti critici di f in $int(A)$ risolvendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ e svolgendo l'analisi come se i punti trovati fossero estremi liberi.*
- *calcolo i punti critici di f in ∂A, studiando i massimi e minimi di f vincolati a stare nella curva che definisce il bordo di A.*
- *valuto tutti i punti trovati, determinando i minimi e massimi assoluti di f in A.*

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 1.

Esempio

Si calcolino gli estremi della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2$$

col vincolo

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

Svolgimento.

Studio dei punti estremi in int(A)

Essendo

$$\nabla f(x,y) = (2x, 8y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

da

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

essendo $a = 2$, $\det(0,0) = 2 \cdot 8 - 0 \cdot 0 = 16 > 0$, *deduciamo che* $(0,0)$ *è un minimo locale.*

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 1.

Studio dei punti estremi in ∂A

Questa analisi era già stata fatta in precedenza ed abbiamo trovato che ha

- *minimi in* $(\pm 1, 0)$,
- *massimi in* $(0, \pm 1)$.

Valutazione della funzione nei punti critici

Da $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

- $f(0, 0) = 0$,
- $f(\pm 1, 0) = 1$,
- $f(0, \pm 1) = 4$,

deduciamo che la funzione ha nel dominio (il disco avente raggio 1 e centrato nell'origine) minimo assoluto in $(0, 0)$ *e massimi assoluti in* $(0, \pm 1)$.

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 2.

Esempio

Si calcolino gli estremi della funzione

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

col vincolo

$$g(x,y) := x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0$$

Svolgimento.

Studio dei punti estremi in int(A)

Essendo

$$\nabla f(x,y) = (2(x+y), 2(x+y)) = (0,0) \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow (x,y) = (x,-x)$$

da

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

l'Hessiana è semidefinita e quindi non chiarisce la natura dei punti stazionari. In realtà , essendo $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ e $f(x,-x) = 0$, tali punti sono minimi locali.

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 2.

Studio dei punti estremi in ∂A

Questa analisi era già stata fatta in precedenza ed abbiamo trovato ha

- $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}})$ *sono minimi in* ∂A,
- $P_3 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $P_4 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ *sono massimi in* ∂A,

Valutazione della funzione nei punti critici

Da $f(x,y) = (x+y)^2$

- $f(x,-x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
- $f(P_3) = f(P_4) = 3/2$

deduciamo che la funzione ha nel dominio

- *minimo assoluto nei punti* $f(x,-x) = 0$, $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;
- *massimo assoluto nei punti* $f(P_3) = f(P_4)$.

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 3.

Esempio

Si calcolino gli estremi della funzione

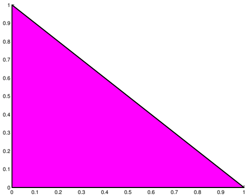
$$f(x, y) = x + y$$

col vincolo

$$g(x, y) := x + y - 1 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Svolgimento.

Con una rapida analisi si vede che il dominio è il triangolo rettangolo con vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.



Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 3.

Studio dei punti estremi in int(A)

Essendo

$$\nabla f(x,y) = (1,1) \neq (0,0)$$

non ci sono punti estremi interni.

Studio dei punti estremi in ∂A

Studiamo i punti critici lato per lato.

- *Il lato l_1 congiungente $(0,0)$ a $(1,0)$ è caratterizzato da $y = 0$ e $x \in [0,1]$. Essendo $f|_{l_1}(x,0) = x$, ha un minimo in $(0,0)$ e massimo in $(1,0)$.*
- *Il lato l_2 congiungente $(1,0)$ a $(0,1)$ è caratterizzato da $x + y = 1$ (cioè $y = 1 - x$) e $x \in [0,1]$. Essendo $f|_{l_2}(x, 1-x) = 1$, f è costante sul lato l_3.*
- *Il lato l_3 congiungente $(0,0)$ a $(0,1)$ è caratterizzato da $x = 0$ e $y \in [0,1]$. Essendo $f|_{l_3}(0,y) = y$, ha un minimo in $(0,0)$ e massimo in $(0,1)$.*

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio 3.

Valutazione della funzione nei punti critici

Da $f(x, y) = x + y$

- $f(0, 0) = 0$;
- $f(x, 1 - x) = 1$ *per* $x \in [0, 1]$;

deduciamo che la funzione ha nel dominio

- *minimo assoluto nel punto* $(0, 0)$;
- *massimi assoluti nei punti* $(x, 1 - x)$ *per* $x \in [0, 1]$.

Esercizio 3 moltiplicatori di Lagrange

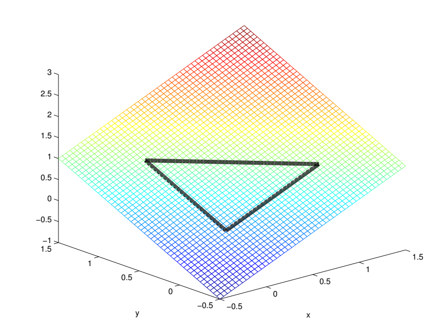


Figura : La funzione f in un intorno dell'origine. In nero i valori sul bordo.

Estremi di funzioni su domini con interno non vuoto. Esercizio per casa.

Esercizio

Calcolare i punti estremi di

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

nel quadrato $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

Traccia.

- *I punti critici di* f *sono*
  - $(0,0)$,
  - $(0,1)$ *(sul bordo!)*,
  - $(1,0)$ *(sul bordo!)*.
- *Vedere i punti della funzione ristretta sul bordo di* D.

Esercizi

Estremi liberi: esercizio 1

Esempio

Calcolare gli estremi liberi di

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8.$$

Da

- $f_x(x,y) = 4x^3 + 2xy^2 - 4x;$
- $f_y(x,y) = 2x^2y + 4y.$

calcoliamo le derivate parziali del secondo ordine

- $f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 2y^2 - 4;$
- $f_{xy}(x,y) = 4xy;$
- $f_{yx}(x,y) = 4xy;$ *(Schwarz!)*
- $f_{yy}(x,y) = 2x^2 + 4.$

Valutiamo le matrici Hessiane nei punti critici. Si ha

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Estremi liberi: esercizio 1

Da

- $f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 2y^2 - 4;$
- $f_{xy}(x, y) = 4xy;$
- $f_{yx}(x, y) = 4xy;$
- $f_{yy}(x, y) = 2x^2 + 4.$

si ha

$$Hf(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Da $f_x x(\pm 1, 0) > 0$, $\det(Hf(\pm 1, 0)) = 8 \cdot 6 - 0 \cdot 0 = 48$, *deduciamo che* $(\pm 1, 0)$ *è un punto di minimo stretto.*

Estremi liberi: esercizio 1

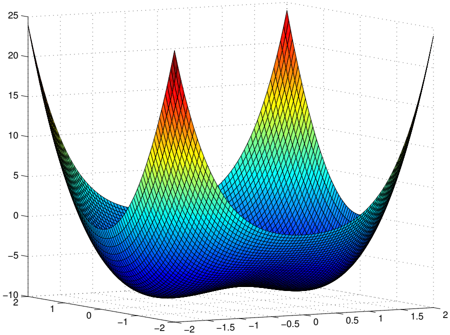


Figura : La funzione $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8$ in un intorno dell'origine. Si notano i minimi relativi in $(\pm 1, 0)$.

Estremi liberi: esercizio 1

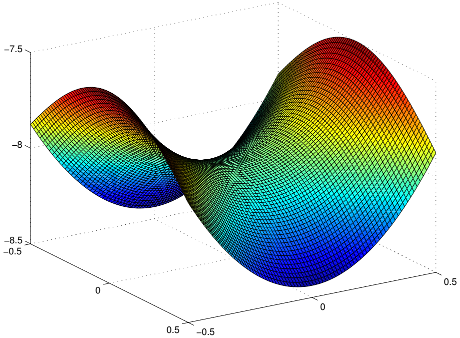


Figura : La funzione $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8$ in un intorno dell'origine. Si nota il punto di sella in $(0,0)$.

Estremi liberi: esercizio 1

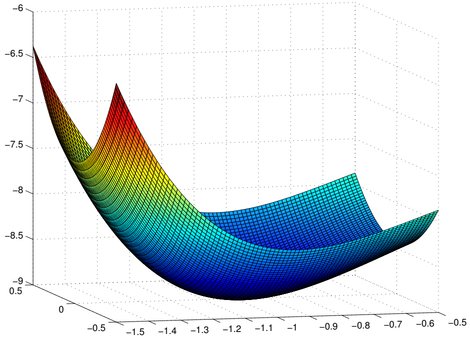


Figura : La funzione $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8$. in un intorno di $(-1,0)$. Si nota il minimo relativo in $(-1,0)$.

Estremi liberi: esercizio 2

Esempio

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3.$$

Svolgimento.

E' noto che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Le sue derivate parziali sono*

- $f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2$;
- $f_y(x, y) = 6xy + 6y^2$.

Quindi, per il teorema di Fermat, i punti critici verificano il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 0 \\ 6xy + 6y^2 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si vede subito che l'unica soluzione è $x = 0$, $y = 0$ *(verifica pure la seconda equazione, altrimenti non avremmo punti critici!).*

Estremi liberi: esercizio 2

Da

- $f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2$;
- $f_y(x, y) = 6xy + 6y^2$.

calcoliamo le derivate parziali del secondo ordine

- $f_{xx}(x, y) = 6x$;
- $f_{xy}(x, y) = 6y$;
- $f_{yx}(x, y) = 6y$; *(Schwarz!)*
- $f_{yy}(x, y) = 6x + 12y$.

e quindi la matrice Hessiane nel punto critico $(0, 0)$ *è*

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il test sull'Hessiana fallisce in $(0, 0)$ *in quanto* $\det(Hf(0, 0)) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$.

Estremi liberi: esercizio 2

Nota.

Consideriamo la retta generica $y = mx$*, passante per* $(0,0)$*. La funzione* $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3$ *per un punto di tale retta* (x, mx) *vale*

$$f(x, mx) = x^3 + 3x(mx)^2 + 2(mx)^3 = (1 + 3m^2 + 2m^3)x^3.$$

Quindi se consideriamo ad esempio $m = 1$, $f(x,x) = 6x^3$ *e*

- *se* $x > 0$ *allora* $f(x,x) = 6x^3 > 0$*;*
- *se* $x < 0$ *allora* $f(x,x) = 6x^3 < 0$*.*

Così in qualsiasi intorno sferico di $(0,0)$ *la funzione assume valori negativi e positivi e quindi la funzione ha un punto di sella in* $(0,0)$ *e nessun altro punto critico.*

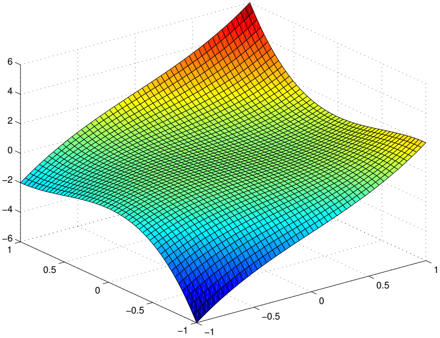


Figura : La funzione $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3$ in un intorno dell'origine.

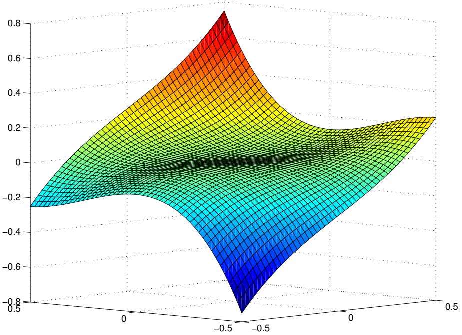


Figura : La funzione $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3$ in un intorno dell'origine. Si nota il punto di sella in $(0,0)$.

Estremi liberi: esercizio 3

Esempio

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$

Svolgimento.

E' noto che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Le sue derivate parziali sono*

- $f_x(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$;
- $f_y(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y$.

Quindi, per il teorema di Fermat, i punti critici verificano il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni abbiamo che deve essere

$$4x^3 + 4y^3 = (4x^3 - 4x + 4y) + (4y^3 + 4x - 4y) = 0 + 0 = 0$$

il che implica $4x^3 + 4y^3 = 0$ *cioè* $x^3 + y^3 = 0$.

Estremi liberi: esercizio 3

Ma da $x^3 + y^3 = 0$, necessariamente $x^3 = -y^3$ ed estraendo le radici cubiche, deduciamo che $x = -y$, cioè i punti critici sono del tipo $(-y, y)$.

- *La funzione f valutata in tali punti verifica*

  $$f(-y, +y) = 2y^4 - 8y^2 + 2 = 2(y^4 - 4y^2 + 1).$$

  Notiamo subito che per $y \to \pm\infty$ si ha che $f(-y, y) \to +\infty$ e quindi non ci sono massimi globali, visto che per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ il polinomio f assume un valore finito.

- *Se $x = -y$, dovendo essere $f_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0$ abbiamo*

  $$0 = 4x^3 - 4x + 4y = 4(-y)^3 - 4(-y) + 4y = -4(y^3 - 2y) = 4y(y^2 - 2)$$

  e quindi $y(y^2 - 2) = 0$, cioè $y = 0$ oppure $y = \pm\sqrt{2}$. Quindi, essendo per i punti critici $x = -y$, abbiamo che essi sono

  $$(\mathbf{0}, \mathbf{0}),\ (\sqrt{\mathbf{2}}, -\sqrt{\mathbf{2}}),\ (-\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{2}}).$$

Estremi liberi: esercizio 3

Calcoliamo le derivate parziali del secondo ordine

- $f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$;
- $f_{xy}(x,y) = 4$;
- $f_{yx}(x,y) = 4$; *(Schwarz!)*
- $f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$.

e quindi le matrici Hessiane nei punti critici sono

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$Hf(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = Hf(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Il test sull'Hessiana

- *fallisce in* $(0,0)$ *in quanto* $\det(Hf(0,0)) = (-4)\cdot(-4) - 4\cdot 4 = 0$,
- *negli altri casi, essendo* $f_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 20$, $\det(Hf(-\sqrt{2},\sqrt{2})) = \det(Hf(\sqrt{2},-\sqrt{2})) = 20\cdot 20 - 4\cdot 4 = 400 - 16 = 384 > 0$ *deduciamo che* $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ *sono minimi locali.*

Estremi liberi: esercizio 3

Facoltativo.

L'analisi del caso $(0,0)$ *è quindi più complicata. Se* $(0,0)$ *è un massimo/minimo allora*

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y) &= f(x,y) - f(0,0) = (x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2) - 2 \\ &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2,\end{aligned}$$

ha segno costante in un intorno $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ *di* $(0,0)$ *ed in particolare in tutte le rette* $y = mx$ *per* $(0,0)$*, vicino all'origine. Ma*

- *per* $m = 1$ *abbiamo* $\Delta f(x,y) = \Delta f(x,x) = 2x^4 \geq 0$*;*
- *per* $m = -1$ *abbiamo* $\Delta f(x,y) = \Delta f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 \leq 0$ *per* $|x| < 2$ *(verificarlo).*

Di conseguenza il segno di $\Delta f(x,y)$ *non è costante in un qualsiasi intorno dell'origine ed un punto è di sella.*

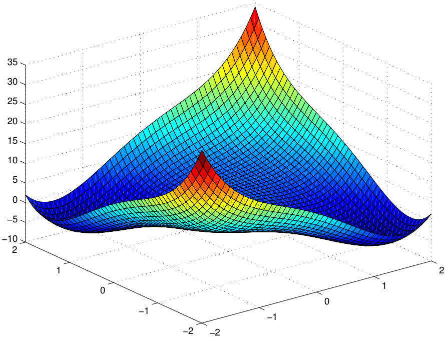


Figura : La funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$ in un intorno dell'origine.

Estremi liberi: esercizio 3

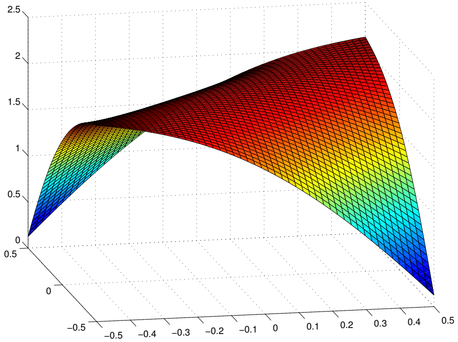


Figura : La funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2$ in un intorno dell'origine. Si nota il punto di minimo in $(0, 0)$.

Estremi vincolati: esercizio 1, $x = k(y)$

Esempio

Calcolare gli estremi di

$$f(x,y) = xy - y^2 + 3$$

vincolati a $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 = 1\}$.

Svolgimento.

Osserviamo che se $x + y^2 = 1$ *allora* $x = 1 - y^2$ *e che*

$$f(1-y^2, y) = (1-y^2)y - y^2 + 3 = -y^3 - y^2 + y + 3.$$

Per $f_\Gamma(y) = -y^3 - y^2 + y + 3$, *abbiamo*

$$f_\Gamma'(y) = -3y^2 - 2y + 1 = (y+1)(1-3y), \quad f_\Gamma^{(2)}(y) = -6y - 2.$$

Dunque i punti estremi si hanno per $y = -1$ *oppure* $y = 1/3$. *Dalla analisi della derivata seconda, deduciamo che sono rispettivamente un massimo un minimo. Essendo* $x = 1 - y^2$, *concludiamo che* $(8/9, 1/3)$ *è un minimo vincolato a* Γ, $(0,-1)$ *è un massimo vincolato a* Γ.

Estremi vincolati: esercizio 2.

Esempio

Calcolare gli estremi di

$$f(x,y) = 3x + 4y + 1$$

vincolati all'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Traccia.

Questo esercizio puì essere risolto col metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Tuttavia mostriamo un approccio alternativo.

Riscriviamo l'equazione dell'ellisse in forma parametrica e otteniamo che corrisponde al sostegno della curva

$$t \to (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\sqrt{(36/9)}\cos(t), \sqrt{(36/4)}\sin(t)) = (2\cos(t), 3\sin(t)),$$

con $t \in [0, 2\pi]$. *Ma allora, per* $t \in [0, 2\pi]$

$$f(2\cos(t), 3\sin(t)) = 3 \cdot (2\cos(t)) + 4 \cdot (3\sin(t)) + 1 = 6\cos(t) + 12\sin(t).$$

Poniamo $f_\Gamma(t) = 6\cos(t) + 12\sin(t)$.

Estremi vincolati: esercizio 2.

Traccia.

Da $f_\Gamma(t) = 6\cos(t) + 12\sin(t)$ *abbiamo*

$$f_\Gamma(t) = -6\sin(t) + 12\cos(t) = -6(\sin(t) + 2\cos(t))$$

e dall'equazione $-6\sin(t) + 12\cos(t) = 0$ *ricaviamo che i punti critici sono tali che*

$$-6\sin(t) + 12\cos(t) = 0$$

cioè verificano $\tan(t) = 2$*, e quindi sono*

$$t_1 = \arctan(2) \approx 1.107148717794090, \quad t_2 = \arctan(2) + \pi \approx 4.248741371383884$$

che corrispondono rispettivamente a un massimo e minimo relativo. Ricordando che i punti dell'ellisse sono $(2\cos(t), 3\sin(t))$*, deduciamo che*

- $(2\cos(t_1), 3\sin(t_1)) \approx (0.8944271909999, 2.683281572999)$ *è un massimo relativo vincolato a* Γ*,*
- $(2\cos(t_2), 3\sin(t_2)) \approx (-0.8944271909999, -2.683281572999)$ *è un minimo relativo vincolato a* Γ*.*

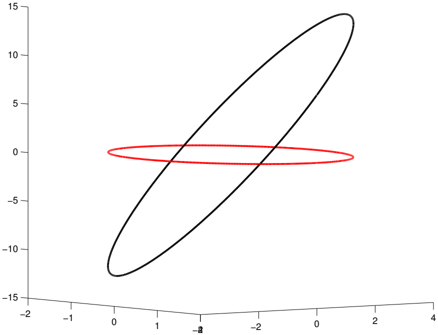


Figura : In rosso: il vincolo ellittico $9x^2 + 4y^2 = 36$. In nero: il grafico della funzione $f(x, y) = 3x + 4y + 1$ sul vincolo.

Estremi vincolati: esercizio 2.

Esempio

Calcolare gli estremi di

$$f(x,y) = 3x + 4y + 1$$

vincolati all'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 = 36$*, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

Traccia.

Osserviamo che $f(x,y) = 3x + 4y + 1$ *e* $g(x,y) = c$ *con* $g(x,y) = 9x^2 + 4y^2$, $c = 36$. *Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se* (x_0, y_0) *è un punto critico allora visto che*

$$f_x(x,y) = 3,\ f_y(x,y) = 4,\ g_x(x,y) = 18x,\ 8y$$

necessariamente

- $f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y)$ *implica* $3 = \lambda \cdot 18x$,
- $f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$ *implica* $4 = \lambda \cdot 8y$,
- $g(x,y) = c$ *implica* $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Estremi vincolati: esercizio 2.

Traccia.

Il punto critico risolve così il sistema

$$\begin{cases} 3 = \lambda \cdot 18x \\ 4 = \lambda \cdot 8y \\ 9x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ha facilmente che $x = 1/(6\lambda)$, $y = (1/2\lambda)$. *Inserendo tali risultati nella terza equazioni abbiamo che*

$$\begin{aligned} 9\frac{1}{36\lambda^2} + 4\frac{1}{4\lambda^2} - 36 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = 36 \Leftrightarrow \frac{5}{4\lambda^2} = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{5}{144} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{144}. \end{aligned}$$

Inserendo tale risultato nelle prime sue equazioni, otteniamo come visto con un altro metodo

- $x = \pm\frac{1}{6\cdot\frac{\sqrt{5}}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.8944271909999$;
- $y = \pm\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{12}} = \pm\frac{6}{\sqrt{5}} \approx \pm 2.683281572999$.

Traccia.

Il metodo non dice se i punti critici siamo massimi o minimi. Ma un ellisse è un insieme

- *chiuso (il suo complementare è un aperto);*
- *limitato.*

Per il teorema di Weierstrass, una funzione continua in un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ *ammette almeno un punto di massimo e uno di minimo.*

Poichè i punti critici sono solo due, uno è un massimo e uno è un minimo. Per distinguere la loro natura basta valutare la funzione nei due punti

- $f(0.8944271909999, 2.683281572999) = 13.41640786499300$;
- $f(-0.8944271909999, -2.683281572999) = -12.41640786499300$.

Dunque

- $(0.8944271909999, 2.683281572999)$ *è massimo,*
- $(-0.8944271909999, -2.683281572999)$ *è minimo.*

Estremi vincolati: esercizio 3.

Esempio

Determinare i punti di estremo relativo e assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2 \cdot y^2 - xy$$

nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$

Svolgimento.

Per prima cosa capiamo come è fatto il dominio.

- *Dovendo essere* $0 \leq x \leq y$ *capiamo che* $x, y > 0$ *e quindi è contenuto nel primo quadrante.*
- *Ricordiamo che* $x = y$ *è la bisettrice del primo e terzo quadrante. Quindi* $x \leq y$ *vuol dire che i punti sono al di sopra di tale bisettrice, inclusa la bisettrice stessa.*
- *Dal fatto che* $y \leq 1$, *deduciamo che sono punti sotto la retta costante* $y = 1$.

Da questa analisi capiamo che la regione è il triangolo A che ha vertici $(0,0)$, $(1,1)$ *e* $(1,0)$.

Estremi vincolati: esercizio 3.

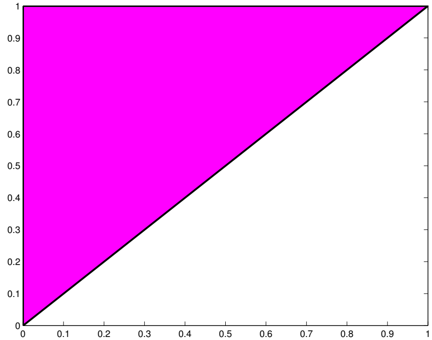


Figura : In magenta, la regione in cui studiare gli estremi (lati inclusi!).

Studiamo i punti critici (liberi) di

$$f(x,y) = x^2 + 2 \cdot y^2 - xy.$$

Non è difficile osservare che

- $f_x(x,y) = 2x - y;$
- $f_y(x,y) = 4y - x = -x + 4y;$

e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

visto che dalla seconda equazione $x = 4y$ *e inserito tale risultato nella prima ricaviamo* $2(4y) - y = 0$ *cioè* $7y = 0$*, e quindi* $y = 0$ *ed essendo* $x = 4y$ *concludiamo* $x = 0$*. Quindi* $(0,0)$ *è punto critico (si vede subito che è un punto del triangolo A, anzi di uno dei suoi lati).*

Estremi vincolati: esercizio 3.

Studiando le derivate seconde

- $f_{xx}(x, y) = 2$;
- $f_{yx}(x, y) = -1$;
- $f_{xy}(x, y) = -1$;
- $f_{yy}(x, y) = 4$;

e quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e visto che $f_{xx}(0,0) > 0$, $\det(Hf(0,0)) = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) = 6 > 0$ *deduciamo che il punto* $(0,0)$ *è un minimo.*

Visto che il triangolo A è un chiuso (include la frontiera!), e la funzione è continua per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo. Dobbiamo quindi individuare il massimo, che sta sulla frontiera (altrimenti sarebbe stato estremo libero, ma così non è stato).

Studiamo il problema del massimo/minimo vincolato sui lati del triangolo A.

- *Lato contenente* $(0,0)$, $(1,1)$*: corrisponde a un segmento sulla retta* $y = x$ *ed è*
$$f_{\Gamma_1}(x) := f(x,x) = x^2 + 2 \cdot x^2 - x \cdot x = 2x^2$$
che ha minimo per $x = 0$ *e massimo per* $x = 1$*. Quindi su questo segmento in cui* $y = x$*, il minimo è* $(0,0)$ *(come previsto, è minimo libero!) e massimo in* $(1,1)$*.*

- *Lato contenente* $(0,1)$, $(1,1)$*: è la retta* $y = 1$*, con* $x \in [0,1]$ *e la funzione ristretta a tale retta diventa*
$$f_{\Gamma_2}(x) := f(x,1) = x^2 + 2 - x.$$
Si vede subito che tale polinomio non ha radici e così ha segno costante. Da $f_{\Gamma_2}(1) := f(1,1) = 1^2 + 2 - 1 = 2$ *si ha che è sempre positiva ed è* $f'_{\Gamma_2}(x) := 2x - 1$*. Quindi ha minimo in* $x = 1/2$ *e massimo in* $x = 0$ *e* $x = 1$*. Così i punti critici sul lato sono* $(0,1)$, $(1/2,1)$, $(1,1)$*.*

Estremi vincolati: esercizio 3.

- *Lato contenente* $(0,0)$, $(0,1)$*: corrisponde a un segmento sulla retta* $x=0$ *ed è* $f_{\Gamma_3}(y) := f(0,y) = 2 \cdot y^2$ *con* $y \in [0,1]$*. Si riconosce che in tale intervallo il minimo si ha per* $y=0$ *e massimo per* $y=1$*.*

  Di conseguenza, su tale lato, il minimo lo si ha in $(0,0)$ *e massimo in* $(0,1)$*.*

Facendo mente locale

- *Lato contenente* $(0,0)$, $(1,1)$*: minimo in* $(0,0)$ *e massimo in* $(1,1)$*.*
- *Lato contenente* $(0,1)$, $(1,1)$*: minimo in* $(1/2,1)$ *e massimi in* $(0,1)$, $(1,1)$*.*
- *Lato contenente* $(0,0)$, $(0,1)$*: minimo in* $(0,0)$ *e massimo in* $(0,1)$*.*

Estremi vincolati: esercizio 3.

Da $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$

- $f(0,0) = 0$,
- $f(1,1) = 2$,
- $f(0,1) = 0$.

deduciamo che $(0,0)$, $(0,1)$ *sono minimi assoluti e* $(1,1)$ *massimo assoluto.*

Estremi vincolati: esercizio 3.

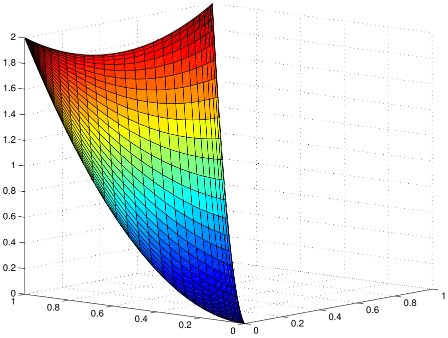


Figura : Grafico di $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ nel triangolo A.

Estremi vincolati: esercizio 4.

Esempio

Determinare i punti di estremo relativo e assoluto della funzione

$$f(x, y) = 3x - 4y$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Svolgimento.

Si riconosce che A *è il disco di centro* $(0, 0)$ *e raggio* 1*. Da*

- $f_x(x, y) = 3$;
- $f_y(x, y) = 4$;

deduciamo che non ci sono punti di estremo libero. Quindi i massimi e i minimi della funzione continua f *nel disco (chiuso e limitato)* A *stanno sul cerchio unitario, cioè* ∂A.

Estremi vincolati: esercizio 4.

Svolgimento.

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (anche se si potrebbe parametrizzare il cerchio unitario e determinare similmente i punti critici). Il cerchio unitario ha equazione $x^2 + y^2 = 1$ *e quindi porremo* $g(x, y) = x^2 + y^2$. *Da*

- $f_x(x, y) = 3$;
- $f_y(x, y) = 4$;
- $g_x(x, y) = 2x$;
- $g_y(x, y) = 2y$;

il metodo dei moltiplicatori di Lagrange richiede di risolvere

$$\begin{cases} 3 = \lambda(2x) \\ -4 = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = -\frac{2}{\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} \\ y = -\frac{2}{\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{3}{5} \\ y = \pm\frac{4}{5} \\ \lambda = \pm\frac{5}{2} \end{cases}$$

Estremi vincolati: esercizio 4.

Poichè per il teorema di Weierstrass, la funzione continua f ha nell'insieme chiuso e limitato A (è un disco che contiene la sua frontiera, ha un minimo e un massimo, ed essendo due i punti critici individuati, uno è un massimo e l'altro un minimo. Da

- $f(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = -1.4$;
- $f(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = 1.4$;

deduciamo che $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ *è un minimo (assoluto!) e* $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ *è un massimo (assoluto!)*

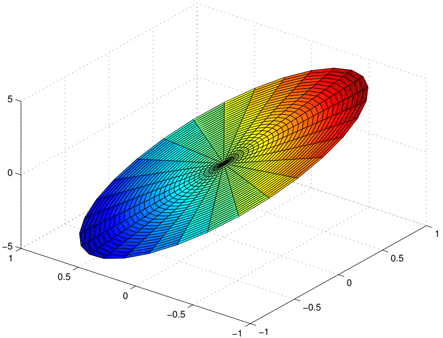


Figura : Grafico di $f(x) = 3x - 4y$ nel disco unitario.

Estremi vincolati: esercizio 5.

Esempio

Determinare i punti di estremo relativo e assoluto della funzione

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2$$

nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

Svolgimento.

Si riconosce subito che A *è dominio la cui frontiera è ellisse di centro* $(0,0)$ *e semiassi* $a = 1$ *e* $b = 1/2$. *Da*

$$f_x(x,y) = 8x,\ f_y(x,y) = 2y$$

deduciamo che l'unico punto di estremo libero è l'origine. Da

$$f_{xx}(x,y) = 8,\ f_{yx}(x,y) = 0,\ f_{xy}(x,y) = 0,\ f_{yy}(x,y) = 2$$

ricaviamo

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Visto che $f_{xx}(x,y) = 8 > 0$, $\det(Hf(0,0)) = 8 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 16 > 0$, $(0,0)$ *è un minimo. Quindi almeno un massimo della funzione continua* f *nel dominio determinato dall'ellisse (chiuso e limitato)* A *sta sull'ellisse, cioè* ∂A.

Estremi vincolati: esercizio 5.

L'ellisse A, in forma parametrica è l'insieme di coppie $(x(t), y(t))$*, con* $t \in [0, 2\pi]$ *dove*

- $x(t) = \cos(\theta)$;
- $y(t) = (1/2)\sin(\theta)$;

e quindi la funzione ristretta all'ellisse vale

$$f_\Gamma(t) = f(x(t), y(t)) = 4\cos^2(t) + (1/4)\sin^2(t) = 4 - (15/4)\sin^2(t).$$

La funzione f_Γ

- *ha massimo per* t *tale che* $\sin^2(t) = 0$*, cioè* $t = 0$ *e* $t = \pi$*, che corrisponde ai punti* $(\pm 1, 0)$;
- *ha minimo per* t *tale che* $\sin^2(t) = \pm 1$*, cioè* $t = \pi/2$ *e* $t = 3\pi/2$*, che corrisponde ai punti* $(0, \pm 1/2)$.

Estremi vincolati: esercizio 5.

Da $f(x) = 4x^2 + y^2$

- $f(\pm 1, 0) = 4$;
- $f(0, \pm 1/2) = 1/4$;
- $f(0, 0) = 0$

ricaviamo che $(\pm 1, 0)$ sono massimi assoluti per A mentre $(0, 0)$ è il minimo assoluto per A.

Estremi vincolati: esercizio 5.

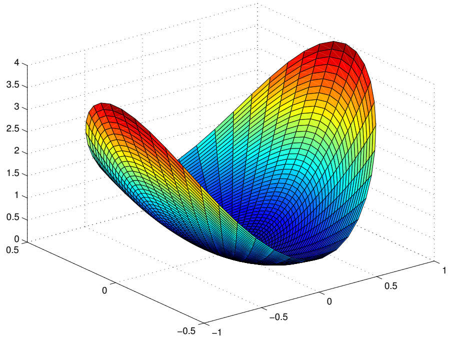


Figura : Grafico di $f(x) = 4x^2 + y^2$ nel dominio $x^2 + 4y^2 \leq 1$.