Giochi in Forma Normale (o strategica)

Massimiliano Ferrara

Università *Mediterranea* di Reggio Calabria & Decisions Lab

Outline

Giochi a somma costante

Esempio

Supponiamo che due ditte, A e B, siamo in concorrenza fra loro per aggiudicarsi due piazze su cui vendere i loro prodotti. Le regole siano le seguenti:

1. Ogni manager stabilisce come ripartire la sua cifra fra le due piazze e prende la decisione non conoscendo quella dell'avversario.
2. Chi avrá investito una cifra maggiore su una piazza se la aggiudicherá ottenendo una certa vincita (che potremmo schematizzare in una certa unitá di capitale), mentre l'altra ditta avrá una perdita esattamente uguale alla vincita dell'altra.
3. A paritá di investimento nessuno vincerá nulla.

Il modello é criticabile per varie ragioni: non é detto che una piazza venga conquistata esclusivamente da una delle due ditte; non si tiene conto dell'investimento fatta da ciascuna, ecc. Supponiamo ora che le possibili decisioni, per motivi di lotto economico, riguardino unitá di centinaia di migliaia di euro e che il manager della ditta A abbia a disposizione 400.000 euro e quello della ditta B 200.000. Il manager della ditta A deve dunque decidere se investire 400.000 euro sulla prima piazza e 0 sulla seconda oppure 300.000 e 100.000 e cosí via. Rappresentiamo in tabella 1, in termini di unitá di capitale, le vincite della ditta A, vincite dipendenti dalle scelte congiunte dei due giocatori.

Giochi a somma costante

$A \setminus B$	2,0	1,1	0,2
4,0	1	0	0
3,1	2	1	0
2,2	1	2	1
1,3	0	1	2
0,4	0	0	1

Table: Tabella 1

Se, ad esempio. A usa la mossa "4,0", cioé 400.000 euro suula prima piazza e 0 euro sulla seconda e B usa la mossa "2,0" cioé 200.000 sulla prima e 0 sulla seconda, allora A vince la prima piazza e con essa 1 unitá di utilitá. La seconda piazza é pareggiata e pertanto l'utilitá totale di A é 1. Se B usa la mossa "1,1" allora vince A la prima piazza (+1 utilitá) e perde la seconda (-1 utilitá) e totalizza 0.

Dominanza fra strategie

Per A, la mossa "3,1" é certamente quella preferibile alla "4,0" perché porta una vincita maggiore o uguale alla "4,0", comunque giochi B. Possiamo dire che la mossa "4,0" é dominata dalla mossa "3,1" e pertanto va scartata. Analogamente possiamo verificare che la "1,3" domina la "0,4" e pertanto ache quest'ultima va scartata. Passiamo a studiare il comportamento di B: nessuna colonna é dominata dall'altra. Possiamo considerare quindi la sottomatrice delle mosse non dominate.

$A \setminus B$	2,0	1,1	0,2
3,1	2	1	0
2,2	1	2	1
1,3	0	1	2

Table: Tabella 2

MAX-MIN e MIN-MAX

La mossa "3,1" assicura ad A, comunque giochi B, una vincita non inferiore a 0; la mossa "2,2" gli assicura, comunque giochi B, una vincita non inferiore ad 1; la mossa "1,3" é analoga alla mossa "3,1" nel senso del "peggio possibile".
Consideriamo la seguente:

$A \setminus B$	2,0	1,1	0,2	min
3,1	2	1	0	0
2,2	1	2	1	1
1,3	0	1	2	0
max	2	2	2	

Tabella 3

MAX-MIN e MIN-MAX

La tabella 3 é stata orlata una colonna a destra dove sono indicati i valori minimi della rispettiva riga e una riga in basso dove si evincono i valori massimi delle rispettive righe.
Come si puó facilmente osservare 1 é il valore massimo fra i minimi possibili ovvero il guadagno che A é in grado di avere comunque sia il gioco di B. Tale mossa si chiama **di max-min per A**.
Dal punto di vista di B la riga in basso evidenzia i casi peggiori che possono capitare per determinare la mossa di **min-max** che assicura la perdita minima. In questo caso specifico le mosse di B sono equivalenti agli effetti della soluzione piú pessimistica.

Il loop "io so che tu sai..."

Cosa fare dunque? Il giocatore B puó ragionare come segue; io so che la mossa migliore di A é "2,2" in quanto gli porta il massimo dei guadagni sicuri. Allora non mi conviene adottare la mossa "1,1", in quanto otterrei una perdita di 2. Sceglieró la mossa "2,0" o "0,2". Supponiamo che B scelga la mossa "2,0"; il giocatore A, aspettandosi questa mossa di B, sceglierá in luogo di "2,2" la riga "3,1" che gli darebbe una vincita di 2. Allora B.... e il ragionamento potrebbe continuare all'infinito.

Punti di sella

$A \setminus B$	I	II	III	min
I	4	2	1	1
II	-1	3	0	-1
III	5	-6	-2	-6
max	5	3	1	

Tabella 4

In questa tabella si puó notare come l'elemento corrispondente alla mossa di max-min per A é lo stesso che corrisponde alla mossa min-max per B. In tal caso nessun giocatore ha interesse ad allontanarsi da quella strategia perché cosí facendo guadagna di meno. Siamo in presenza di un "punto di sella nelle strategie pure" in quanto la vincita 1 corrisponde al valore minimo di riga e al valore massimo di colonna.

Che succede se non esiste punto di sella? Qui entra in campo il teorema che ha dato a Von Neumann la paternitá dell'odierna Teoria dei Giochi.
Supponiamo che la matrice delle vincite sia la seguente:

$A \setminus B$	I	II	
I	3	1	x_1
II	2	6	x_2
	y_1	y_2	

Tabella 5

Strategie Miste

La tabella 5 non ha un punto di sella nelle strategie pure. Possiamo supporre che il gioco venga ripetuto piú volte e assegnare una distribuzione di probabilitá sull'insieme delle mosse di ciascuno dei giocatori. Siano dunque x_1 e x_2 le probabilitá che il giocatore A adotti rispettivamente la sua prima e la sua seconda mossa; analogamente siano y_1 e y_2 le probabilitá delle scelte di B. Dovrá dunque essere:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

La Vincita attesa da A é $3x_1 + 2x_2$ se B usa la sua prima mossa, altrimenti é $x_1 + 6x_2$.
La perdita di B é $3y_1 + y_2$ se A usa la sua prima mossa, altrimenti é $2y_1 + 6y_2$.
Il problema per A é scegliere la distribuzione (x_1, x_2) che é in grado di assicurargli la massima vincita.
Detta v la vincita (tuttora incognita) di A, il problema per A puó essere tradotto cosí:

$$max \;\; v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq v \\ x_1 + 6x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dal punto di vista di B il problema é scegliere la distribuzione (y_1, y_2) che é in grado di assicurargli la minima perdita, comunque giochi A.

Detta w la perdita di B, il suo problema é:

$$min\ w$$

nei vincoli

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \leq w \\ 2y_1 + 6y_2 \leq w \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Strategie Miste

Le soluzioni al problema sono:

1. per A: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}; v = \frac{8}{3}$
2. per B: $y_1 = \frac{5}{6}, y_2 = \frac{1}{6}; w = \frac{8}{3}$

Notiamo che $v = w = \frac{8}{3}$ e pertanto il punto max-min per A coincide con il punto min-max per B: abbiamo trovato un **punto di sella nelle strategie miste**, cioé una coppia di distribuzioni probabilistiche che assicurano ad entrambi lo stesso risultato.

Il Teorema del MIN-MAX

Il "*teorema del min-max*" di Von Neumann assicura che ogni gioco matriciale a somma zero ha almento un punto di sella nelle strategie miste.

Vale dunque in ogni caso $v = w$ e il problema di B é il duale del problema di A.

Notiamo che con il termine "*strategia*" si intende l'insieme delle singole mosse che, operate dal giocatore, lo portano ad ottenere un certo risultato effettivo o atteso.

Equitá

Riprendiamo dall'ultimo esempio fatto. La vincita attesa é $\frac{8}{3}$ per A e $-\frac{8}{3}$ per B.

Domanda N.1

Questo é un gioco equo?

Evidentemente no, in quanto, la vincita attesa da A é maggiore di quella attesa da B. La cosa era d'altra parte evidente fin dall'inizio, in quanto tutti gli elementi della matrice sono positivi.

Domanda N.2

Che senso ha per B partecipare a questo gioco? Non é piú conveniente rinunciarvi a priori?

Da una parte, se si puó rispondere che in certe situazioni é comunque necessario giocare ed é proprio in quelle circostanze che emergono le vere qualitá del manager: quando riesce a destreggiarsi anche nelle situazioni piú disperate.
Vi é poi da considerare che, in altri casi, non é cosí evidente a priori se la matrice é favorevole all'uno o all'altro giocatore.
Ad esempio, nel caso della tabella 4, le vincite sono sia positive che negative, addirittura la massima vincita possibile per A (5) é inferiore alla massima vincita di B (6), ma il gioco é favorevole ad A.

Quind icon il metodo di max-min(puro o misto)é possibi le valutare a priori l'opportunitá o meno di entrare in campo.

Definizione

Un **gioco in forma normale** é composto dall'insieme dei giocatori $N = \{1, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$, dall'insieme $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ delle possibili **strategie** adottabili da ciascun giocatore e dall'insieme $p(s) = \{p_1(s), \ldots, p_n(s)\}$ dei **pagamenti** assegnati a ciascun giocatore in funzione delle strategie $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ adottate da tutti.

Formalizzazione

Definizione

Si dice che un gioco é ad **informazione perfetta** se tutti i giocatori hanno informazione perfetta.

Definizione

Una n-pla di strategie $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ é detta **Nash equilibrio** se, per tutti gli i da 1 ad n e tutti gli $s_i \in S_i$ si ha:

$$p_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \leq p_i(s_1^*, \dots, s_n^*).$$

Ció significa che nessun giocatore ha motivo di cambiare la sua strategia se tutti gli altri sono fissi nelle loro. Si puó dimostrare l'esistenza di una n-pla di strategie di equilibrio per ogni gioco finito n-persone ad informazione completa.

Formalizzazione

Definizione

Per una n.pla di strategie $s \in S$, si chiama **pagamento totale** $t(s)$ la somma di tutti i pagamenti relativi ad s:

$$t(s) = \sum_{i=1}^{n} p_i(s).$$

Definizione

Il gioco é detto a **somma costante** κ se $t(s) = \kappa$ per tutte le $s \in S$. In particolare, il gioco é detto a **somma zero** se $\kappa = 0$.

Formalizzazione

Consideriamo i giochi a somma costante fra due persone.
Tali giochi sono rappresentabili con la matrice P i cui elementi p_{ij} sono definiti come:

$$p_{ij} = p_1(s_i, s_j) = -p_2(s_i, s_j).$$

Ciascun elemento rappresenta il pagamento attribuito al primo giocatore (e anche l'opposto del pagamento attribuito al secondo) nel caso il primo giocatore usi la i-esima strategia e il secondo la sua j-esima.

Formalizzazione

Definizione

Si dice che l'i-esima riga **domina** la κ-esima se: $p_{ij} \geq p_{\kappa j}$ per tutti i j e
$p_{ij} > p_{\kappa j}$ per almeno un j.

Definizione

Si dice che l'j-esima colonna **domina** la h-esima se: $p_{ij} \geq p_{ih}$ per tutti gli i e
$p_{ij} > p_{ih}$ per almeno un i.

Definizione

Si dice che (i, j) é un **punto di sella nelle strategie pure** se p_{ij} é sia il massimo della colonna j che il minimo della riga i. La corrispondente coppia di strategie é allora **in equilibrio**.

Formalizzazione

Se non esistono punti di sella nelle strategie pure, é possibile trovare un **punto di sella nelle strategie miste**.

Definizione

Una **strategia mista** per un giocatore é una distribuzione di probabilitá sull'insieme delle sue strategie pure, cioé un m-vettore $x = (x_1, \ldots, x_m)$, (ove m é il numero di strategie pure a disposizione del giocatore), tale che

1. $x_i \geq 0$ per tutti gli i e m e
2. $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Formalizzazione

Definizione

Siamo m_1 e m_2 le strategie pure del primo e del secondo giocatore. Se il primo giocatore sceglie la strategia mista x ed il secondo la strategia mista y, allora il pagamento atteso é:

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} x_i p_{ij} y_j.$$

Il **teorema del min-max** assicura l'esistenza di una coppia distrategie miste (x^*, y^*) tali che

$$v(x^*, y^*) = \min_x \max_y v(x,y) = \max_y \min_x v(x,y)$$

cioé un punto di sella nelle strategie miste.

Formalizzazione

La soluzione per il primo giocatore é ottenuta risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max_{x} \; v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1} x_i p_{ij} \geq v & j = 1, \ldots, m_2 \\ \sum_{i=1}^{m_1} x_i = 1 & \\ x_i \geq 0, & i = 1, \ldots, m_1 \end{cases}$$

Formalizzazione

La soluzione per il secondo giocatore é ottenuta risolvendo il duale del precedente problema:

$$\min_{y} v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m_2} p_{ij} y_j \leq v & i = 1, \ldots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{m_2} y_j = 1 & \\ y_j \geq 0, & j = 1, \ldots, m_2 \end{cases}$$

Esercizio N.1: Un problema militare

In un'operazione militare vi sono due parti contrapposte, interessate a conquistare due roccaforti. La prima parte ha una dotazione di quattro compagnie di soldati e la seconda una dotazione di due compagnie. Ogni comandante deve decidere quante delle sue compagnie deve inviare in ciascuna delle due roccaforti.

La vincita é cosí determinata: chi invia piú compagnie in un certa posizione vince la roccaforte e cattura le compagnie avversarie che erano state inviate in quella posizione. Ottiene dunque un'unitá di utilitá per la roccaforte e tante unitá di utilitá quante sono le compagnie inviatevi dall'altro. L'altro perde esattamente la stessa unitá complessiva.

Esercizio N.1

Si tratta evidentemente di un gioco a somma zero tra due persone (del tipo noto in letteratura come "*gioco del colonnello Blotto*"). L'esercizio consiste in:

1. costruire una matrice dei pagamenti;
2. eliminare le strategie dominate;
3. cercare i punti di max-min e min-max nelle strategie pure;
4. nel caso non vi sia un punto di sella nelle strategie pure, impostare il problema di programmazione lineare (e il duale) che determino le strategie di equilibrio.

Esercizi

Esercizio N.2: Aiuto strategico a Paesi in via di sviluppo

Due Paesi non allineati hanno sovrabbondanza di beni rapidamente deteriorabili (ad esempio derrate alimentari) o privi di un mercato economicamente vantaggioso. Decidono allora di devolvere tali beni in aiuti a Paesi in via di sviluppo con lo scopo di ottenere un'influenza politica ed una conseguente posizione strategica sui relativi territori.

Esercizio N.2

Supponiamo che i possibili beneficiari degli aiuti siano due: ONE e TWO. Siano rispettivamente (con opportune unitá di misura) 4 e 3 le quantitá di beni a disposizione del Paese A e del Paese B da devolvere in aiuti. Il Paese A dovrá quindi scegliere se dare tutto il suo aiuto ad ONE e nessuno a TWO, oppure 3 unitá ad ONE ed una a TWO, ecc. Analogamente il Paese B deve scegliere se dare 3 unitá ad ONE e 0 a TWO e cosí via. Se un Paese dá ad una "*developing country*" una quantitá di beni maggiore di quella data all'altro Paese si assicura il controllo della relativa area strategica ed una conseguente unitá di utilitá in termini strategici ($u = 1$); l'altro Paese perde il controllo e riceve un'unitá negativa ($u = -1$). A partitá di aiuti alla stessa "*developing country*" corrisponde un'utilitá nulla per entrambi i Paesi. La risoluzione consiste negli stessi steps fatti nell'Esercizio N.1.

Conclusioni

Dagli esempi appena illustrati si evince come la Teoria dei Giochi (e la Matematica in generale) sia in grado di descrivere con lo stesso modello diverse situazioni reali. Le principali conclusioni che si possono per ora trarre sull'opportunitá di conoscere la Teoria dei Giochi sono:

1. nel gioco a somma zero, chi conosce a applica la strategia (pura o, se necessario, mista) del min-max, é in grado di assicurasi una vincita minimale, vincita che sará maggiore nel caso in cui l'avversario non applichi la sua strategia ottima;
2. chi conosce la Teoria dei Giochi é in grado di valutare a priori la sua vincita e pertanto puó decidere (nel caso sia in condizioni di farlo) se entrare o meno nel gioco.