# *BUSINESS ANALYTICS AND DECISIONS THEORY*

## *Dualità nella Programmazione Lineare*

**A. A. 2019/2020**

*Corso di Laurea Magistrale (LM-56) in Economia*
*Docente: Massimiliano FERRARA*

# Problema duale

- Ad ogni problema di PL, detto **primale**, risulta associato un altro problema, detto **duale**, costruito utilizzando gli stessi coefficienti (trasposti)

- Le soluzioni dei due problemi sono tra loro strettamente legate.

- Il duale è formulato da informazioni contenute nel problema originale (primale) e, quando risolto, il duale fornisce tutte le informazioni essenziali sulla soluzione del primale

# Problema duale

Si consideri un problema P di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ s.v. \quad Ax &= b \\ x &\geq 0; \end{aligned}$$

con A ∈ $R^{mxn}$, b ∈$R^m$ e x ∈ $R^n$

Al problema P rimane associato il problema D

$$max\, w(y) = b^T y$$

$$s.v.$$

$$A^T y \leq c$$

# Problema duale

È immediato osservare che, mentre il primale è un problema di minimo, il duale è un problema di massimo e che i termini noti di un problema sono i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Inoltre, a ciascuna variabile del primale corrisponde univocamente un vincolo del duale e a ciascuna variabile del duale è univocamente associato un vincolo del primale.

# Problema duale

Riassumendo, l'insieme delle proprietà di «simmetria» nella coppia primale-duale viene espresso attraverso le seguenti regole generali:

- a un vincolo di disuguaglianza nel primale corrisponde una variabile vincolata in segno nel duale;
- a un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale;
- a una variabile vincolata in segno nel primale corrisponde un vincolo di disuguaglianza nel duale;
- a una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale;
- se la funzione obiettivo del primale è in forma di minimo, la funzione obiettivo del duale è in forma di massimo e viceversa,

ovvero, più formalmente, dal seguente teorema, la cui dimostrazione ricalca le modalità utilizzate per costruire il duale dei vari problemi di PL introdotti in precedenza.

# Problema duale

Dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned}
a^T{}_i x &\geq bi, & i &\in I_1 \\
a^T{}_i x &\leq bi, & i &\in I_2 \\
a^T{}_i x &= bi, & i &\in I_3 \\
x_j &\geq 0, & j &\in J_1 \\
x_j &\leq 0, & j &\in J_2 \\
x_j &\ libera, & j &\in J_3
\end{aligned}$$

# Problema duale

il suo duale è

$$\max w(y) = b^T y$$

$$
\begin{aligned}
& s.v. \\
& y^T A_j \le c_j, && j \in J_1 \\
& y^T A_j \ge c_j, && j \in J_2 \\
& y^T A_j = c_j, && j \in J_3 \\
& y_i \ge 0, && i \in I_1 \\
& y_i \le 0, && i \in I_2 \\
& y_i \ libera, && i \in I_3.
\end{aligned}
$$

| **Primale** $\min z(x) = c^T x$ | **Duale** $\max w(y) = b^T y$ |
|---|---|
| $a^T{}_i x \geq bi$ | $y_i \geq 0$ |
| $a^T{}_i x \leq bi$ | $y_i \leq 0$ |
| $a^T{}_i x = bi$ | $y_i \ libera$ |
| $x_j \geq 0$ | $y^T A_j \leq c_j$ |
| $x_j \leq 0$ | $y^T A_j \geq c_j$ |
| $x_j \ libera$ | $y^T A_j = c_j$ |

# Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
\min z(x) \;=\; 8x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 7x_4 \\
s.v. \\
4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 27 \\
-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 12 \\
x_1 - 2x_4 = 20 \\
x_1, x_2 \geq 0 \\
x_4 \leq 0,
\end{aligned}
$$

# Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\max w(y) = 27y_1 + 12y_2 + 20y_3$$

$$s.v.$$

$$4y_1 - y_2 + y_3 \le 8$$
$$-6y_1 + 3y_2 \le 5$$
$$8y_1 + 5y_2 = 12$$
$$2y_1 + 3y_2 - 2y_3 \ge 7$$
$$y_1 \le 0$$
$$y_2 \ge 0.$$

# Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$s.v.$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

# Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\min w\,(y) = 10y_1 + 15y_2 + 20y_3$$

$s.v.$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 6$$
$$y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 8$$
$$2y_1 + 4y_3 = 4$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_3 \leq 0.$$

# Proprietà

- I problemi primali e duali sono strettamente connessi, non solo per quanto riguarda la loro formulazione, ma anche per le soluzioni.
- Le proprietà di seguito hanno un significato importante sia teorico che pratico.

# Proprietà della coppia primale-duale

- 1. Simmetria

<u>Il duale del problema duale è il problema primale.</u>

**Dimostrazione**. La dimostrazione segue immediatamente dalle regole di costruzione del duale.

# Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\leq 0; \end{aligned}$$

il corrispondente problema duale (D) è

$$\min w(y) = 2y_1 + 8y_2$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geq 2 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 4 \\ -5y_1 + y_2 &\leq 7 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

# Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

A sua volta, il duale del problema (D) è

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$
$$s.v.$$
$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0;$$

che corrisponde al problema (P).

# Proprietà della coppia primale-duale

- **2. Teorema Dualità Debole**

  Sia data una coppia di problemi P-D che ammettono soluzione ammissibile. Allora, per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ di P e $\bar{y}$ di D, vale la relazione:

$$b^T\bar{y} \leq c^T\bar{x}$$

<u>Dimostrazione</u>

Essendo $\bar{y}$ ammissibile

$A^T\bar{y} \leq c$ ovvero $\bar{y}^T\boldsymbol{A} \leq c^T$

Moltiplicando ambo i membri per $\bar{x}$ ammissibile

$$\bar{y}^T\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{y}^T\boldsymbol{b} \leq c^T\bar{x}$$

# Proprietà della coppia primale-duale

- In generale il Teorema di Dualità Debole stabilisce che il valore di funzione obiettivo del problema di massimo è un limite inferiore per quello di minimo.
- La differenza $c^T\bar{x}$ - $b^T\bar{y}$ è non negativa e si chiama **gap di ottimalità**
- Se il gap è nullo, le corrispondenti soluzioni sono ottime

# Proprietà della coppia primale-duale

**Corollario**

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di P e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile di D.

Se $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ allora $(\bar{x}, \bar{y})$ sono soluzione ottime per i rispettivi problemi.

Dimostrazione

Supponiamo che $\bar{x}$ non sia ottima. Esisterebbe una nuova soluzione $\tilde{x}$ tale che $c^T\tilde{x} \leq c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ e questo violerebbe il teorema di dualità debole.

# Proprietà della coppia primale-duale

**3. Teorema di Dualità Forte**

Se il problema primale ha soluzione ottima finita allora anche il suo duale possiede una soluzione ottima ed il valore delle due soluzioni è uguale.

<u>Dimostrazione</u>

Sia $x^*$ la soluzione ottima associata alla base B

$$x^*_B = A_B^{-1} b;$$
$$x^*_N = 0,$$

di valore pari a $z^* = c_B^T A_B^{-1} \mathrm{b}$. Essendo soluzione ottima i coefficienti di costo ridotto sono non negativi

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T.$$

# Proprietà della coppia primale-duale

In particolare

$c_N{}^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0^T$ ovvero $c_N{}^T \geq c_B^T A_B^{-1} A_N$

Sia $\quad y_B{}^T = c^T{}_B A^{-1}{}_B$ .

Si osserva che $\bar{y}$ è soluzione ammissibile del problema duale.

$y_B{}^T A = [y_B{}^T A_B \; y_B{}^T A_N ] = [c^T{}_B A^{-1}{}_B A_B \mid c^T{}_B A^{-1}{}_B A_N ] =$

$= [c^T{}_B \mid c^T{}_B A^{-1}{}_B A_N ] \leq [c^T{}_B \mid c_N{}^T]$

$y_B{}^T b = c^T{}_B A^{-1}{}_B b = c^T{}_B x^*{}_B$

Il gap di ottimalità è nullo e le due soluzioni sono ottime

# Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 14x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 30x_4$$
$$s.v.$$
$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 4$$
$$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

il cui problema duale risulta essere

$$\max w(y) = 4y_1 + 6y_2$$
$$s.v.$$
$$7y_1 + 5y_2 \leq 14$$
$$6y_1 - 3y_2 \leq -6$$
$$3y_1 + 6y_2 \leq 3$$
$$-6y_1 + 5y_2 \leq 30.$$

# Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

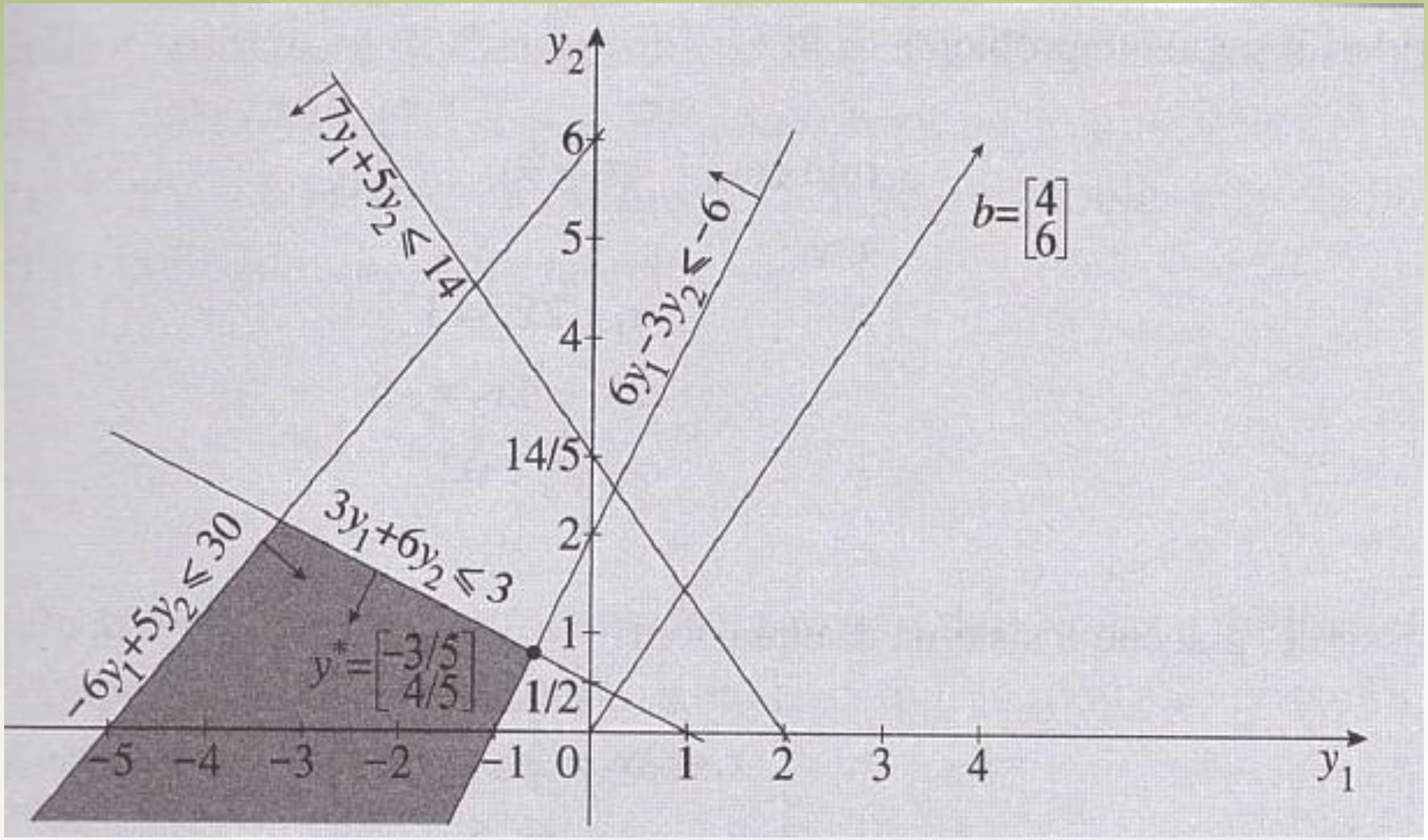
La soluzione ottima del problema primale è $x^* = [0\ 2/15\ 16/15\ 0]^T$, con valore $z* = 12/5$.

Di conseguenza, in base al teorema di dualità forte, il problema duale ha soluzione ottima $y*$ avente valore $w^* = 12/5$.

Infatti, risolvendo graficamente il problema duale (vedi Figura 7.2), si ricava che $y^* = [-3/5\ 4/5]^T$, a cui corrisponde il valore $w^* = 12/5$.

# Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.2 Soluzione grafica del problema duale



# Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario

  Se il problema primale è illimitato inferiormente, allora il problema duale non ammette soluzioni ammissibili.

Dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che il problema primale sia illimitato inferiormente e che esista una soluzione ammissibile $\bar{y}$ per il problema duale.

Per il teorema di dualità debole, deve essere $c^T x \geq b^T \bar{y}$, per ogni $x \in P$, contraddicendo l'ipotesi che il primale sia illimitato inferiormente ($b^T \bar{y}$ sarebbe infatti una limitazione inferiore per tutti i valori della funzione obiettivo del problema primale).

# Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

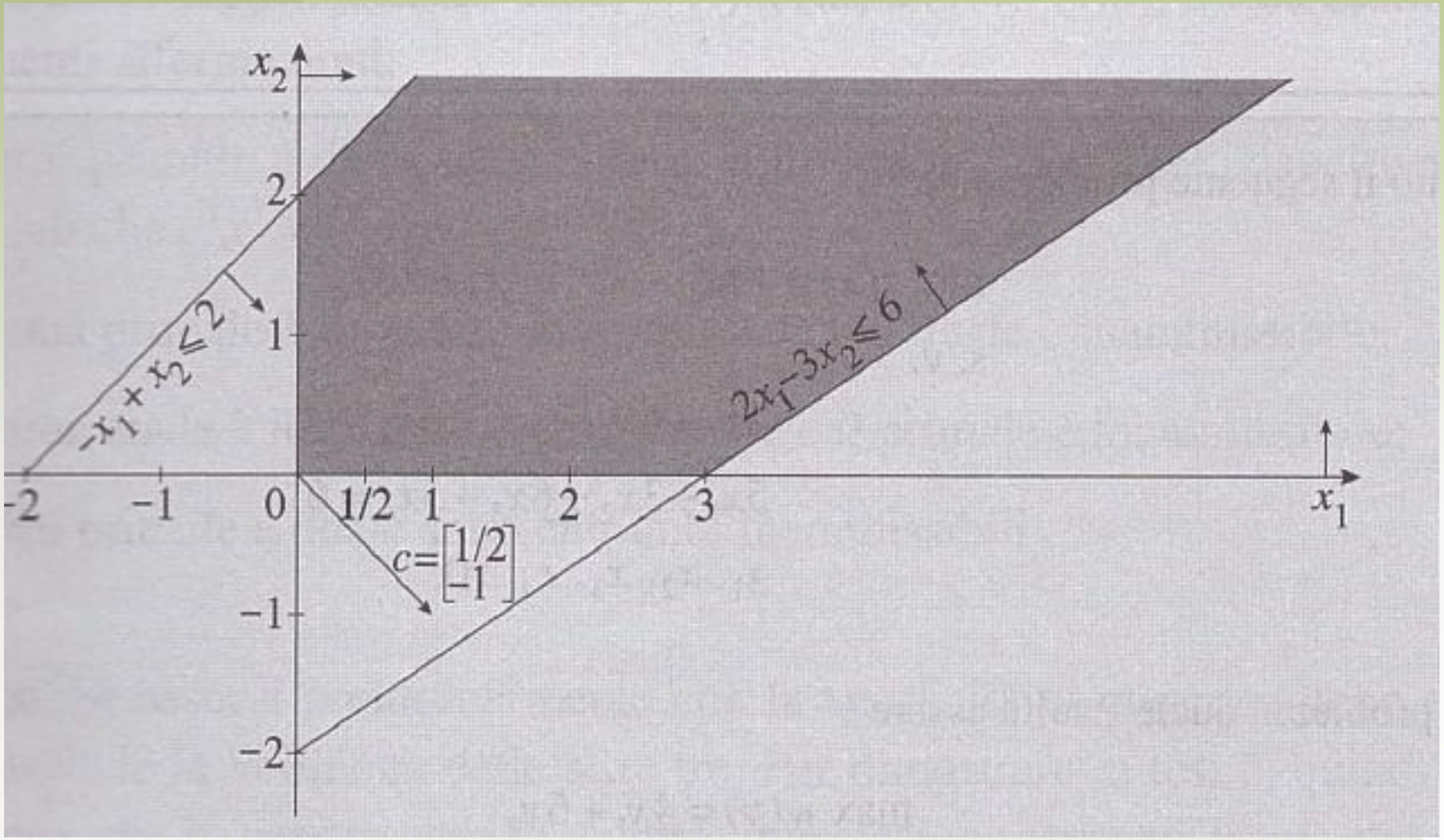
Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min z(x) = \ & 1/2x_1 - x_2 \\ s.v.\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0; \end{aligned}$$

È dimostrato per via grafica essere illimitato inferiormente (vedi Figura 7.1)

# Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.1 – Problema illimitato inferiormente



# Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale

$$\max w(y) = 6y_1 + 2y_2$$
$$s.v.$$
$$2y_1 - y_2 \leq 1/2$$
$$-3y_1 + y_2 \leq -1$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$

è inammissibile.

# Proprietà della coppia primale-duale

Se il problema primale è inammissibile il duale non ammette ottimo (inammissibile o illimitato)

| | | DUALE | | |
|---|---|---|---|---|
| | | OTTIMO FINITO | ILLIMITATO SUPERIOR. | INAMMISSIBILE |
| PRIMALE | OTTIMO FINITO | SI | NO | NO |
| | ILLIMITATO INFERIOR. | NO | NO | SI |
| | INAMMISSIBILE | NO | SI | SI |

# Esempio

PRIMALE INAMMISSIBILE – DUALE INAMMISSIBILE

$$\min z(x) = x_1$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \text{ libere}$$

$$max\, w(y) = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1 - y_2 = 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

# Esempio

PRIMALE INAMMISSIBILE – DUALE ILLIMITATO

$$\min z(x) = x_1$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$max\, w(y) = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 \leq 1$$
$$y_1 - y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

# Proprietà della coppia primale-duale

## 4. Teorema degli scarti complementari

Data una coppia di soluzioni ottime, una per il problema primale e una per il duale, si può fornire un'ulteriore caratterizzazione delle stesse avvalendosi delle cosiddette «**condizioni di ortogonalità**».

Sia $\bar{x} \in R^n$ una soluzione ammissibile del problema primale e $\bar{y} \in R^m$ una soluzione ammissibile del problema duale; $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i\right)\bar{x}_j = 0, \quad j=1,\dots,n. \qquad (1)$$

# Proprietà della coppia primale-duale

<u>Dimostrazione</u>.

Si osservi preliminarmente che, in virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, le condizioni di ortogonalità (1) possono equivalentemente riscriversi come un'unica equazione

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0 \qquad (2)$$

dal momento che le(1) implicano il soddisfacimento della (2) e viceversa.

# Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione necessaria*).

Si supponga che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime per i rispettivi problemi e dimostriamo che soddisfano le condizioni di ortogonalità.

Dal **teorema di dualità forte** si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$$

ovvero,

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T b = 0 \qquad (3)$$

# Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione necessaria*).

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (3) può scriversi come

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T A \bar{x} = 0$$

ovvero,

$$(c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0.$$

# Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione sufficiente*).

Se le soluzioni x e y soddisfano la relazione (2), si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \qquad (4)$$

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (4) è equivalente a

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b.$$

# Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione sufficiente*).

Dal **Corollario** segue l'ottimalità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi.

Le condizioni di ortogonalità rappresentano uno strumento molto utile e versatile nell'ambito della teoria della dualità.

In particolare, possono essere utilizzate per «**certificare**» agevolmente l'ottimalità di una data soluzione per un problema di PL.

# Esercizio 1

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 40x_1 + 60x_2$$

$$s.v.$$

$$20x_1 + 20x_2 \leq 2800$$
$$10x_1 \leq 1000$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 300$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Risolvere il problema primale utilizzando il metodo grafico
2. Formulare il problema duale
3. Determinare i valori ottimali delle variabili duali utilizzando le condizioni di ortogonalità.

# Esercizio 2

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$$
$$s.v.$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1 + 3x_2 + 1/2x_4 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1. Quante variabili ha il problema duale?
2. Scrivere il problema duale e trovare la soluzione ottima.
3. Trovare la soluzione ottima del problema primale utilizzando quella del duale.

# Esercizio 3

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 3x_1 + 2x_2$$

$s.v.$

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Scrivere il problema duale.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $x_1 = 6$, $x_2 = 4$