

Business Analytics and Decisions Science

Modelli di Programmazione Lineare
A.A. 2018-2019

Principali classi di modelli di PL

- ⦿ **Modelli di pianificazione della produzione**
- ⦿ **Modelli di miscelazione**
- ⦿ **Modelli multiperiodali**

Modelli di pianificazione della produzione

- I modelli di pianificazione della produzione consentono di formulare problemi per l'allocazione ottimale di «risorse» (materie prime, macchinari, manodopera), disponibili in quantità limitata e utilizzate per realizzare un numero finito di «prodotti».
- Per ciascun prodotto è noto il processo produttivo, riassumibile nel consumo di un quantitativo noto di risorse.
- La vendita di ciascuna unità di prodotto genera un profitto noto e la funzione obiettivo consiste nel massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tutti i prodotti realizzati.

Esercizio (Meko)

La Meko è una multinazionale specializzata nella produzione di due tipi di biocarburanti: il biometanolo e il biodimetiltere.

Il processo produttivo richiede la lavorazione nei tre stabilimenti di preparazione, purificazione ed estrazione.

I tempi necessari per la lavorazione di una tonnellata dei due biocarburanti sono riportati nella Tabella unitamente alla capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti.

Stabilimento	Ore di lavorazione a tonnellata		Capacità giornaliera [h]
	Biometanolo	Biodimetiltere	
Preparazione	0,72	0,85	18
Purificazione	1,68	1,42	18
Estrazione	1,92	2,12	16

Tabella 2.1 Dati relativi al problema di produzione della Meko.

Esercizio (Meko)

Il responsabile del marketing aziendale ha confermato che ogni tonnellata prodotta di biometanolo e di biodimetilene può essere venduta, realizzando un profitto (in €) pari a 540 e 590, rispettivamente.

Definire il piano di produzione ottimale.

Esercizio (Meko)

⊙ Variabili di decisione

- > x_j , $j = 1, 2$, livello di produzione giornaliera dei due biocarburanti (1 = biometanolo, 2 = biodimetiletero).

⊙ Vincoli

- > Vincoli sulla capacità di produzione giornaliera
 - $0,72x_1 + 0,85x_2 \leq 18$
 - $1,68x_1 + 1,42x_2 \leq 18$
 - $1,92x_1 + 2,12x_2 \leq 16$
- > Vincoli di non negatività
 - $x_1, x_2 \geq 0$

⊙ Funzione obiettivo

- $\max z(x) = 540x_1 + 590x_2$

Esercizio (Meko)

◎ Soluzione ottima

$$> x_1^* = \frac{25}{3} \quad x_2^* = 0$$

$$> z^* = 4500$$

Template di riferimento per i modelli di pianificazione della produzione

Si supponga di disporre di un numero m di risorse disponibili per la produzione di n prodotti.

Si indichi con:

- a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la quantità di risorsa i necessaria per produrre una unità di prodotto j ;
- b_i , $i = 1, \dots, m$, la disponibilità massima della risorsa i ;
- p_j , $j = 1, \dots, n$, il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita del prodotto j ;
- x_j , $j = 1, \dots, n$, variabili di decisione indicante il livello di produzione del prodotto j .

Template di riferimento per i modelli di pianificazione della produzione

Il modello di PL è il seguente:

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

s. v

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Modelli di pianificazione della produzione

- Varianti del problema possono essere ottenute considerando come obiettivo la minimizzazione dei costi complessivi di produzione, oppure includendo vincoli di budget, di mercato (che impongono livelli massimi di produzione per uno o più prodotti) o di sfruttamento degli impianti (in base ai quali si fissano eventualmente livelli minimi di produzione).
- In alcuni casi, la realizzazione di un prodotto richiede la scelta di risorse disponibili tra più alternative (ad esempio, un'operazione meccanica di tornitura può essere eseguita su uno qualsiasi dei torni disponibili nell'officina). In questo caso le variabili di decisione esprimono il livello produttivo per ogni prodotto utilizzando una specifica risorsa, hanno un doppio indice x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ed indicano la quantità di prodotto j realizzata utilizzando la risorsa i .

Esercizio (Itaca)

Itaca è un'industria toscana specializzata nella produzione di materiali per l'edilizia sostenibile. Nello stabilimento di Arezzo si realizzano tre tipi di malte di argilla, A, B e C, utilizzando allo scopo tre reparti, ognuno in grado di realizzare un qualsiasi tipo di malta. I tempi di lavorazione disponibili presso ogni reparto per ogni tipo di malta sono riportati in Tabella, insieme alla capacità produttiva dei reparti e al profitto derivante dalla vendita. Studi di mercato hanno mostrato che una pianificazione ottimale dovrebbe prevedere un livello di produzione della malta di tipo A compresa tra il 50% e il 70% della produzione totale. Definire il piano di produzione ottimale.

Reparto	Malta A	Malta B	Malta C	Capacità [h]	Profitto [€/q]
1	0,18	0,21	0,24	90	18
2	0,20	0,18	0,21	85	21
3	0,12	0,22	0,23	80	24

Esercizio (Itaca)

● Variabili

- > x_{ij} , $i = 1,2,3$, $j = A,B,C$, quantità di malta (espressa in quintali) di tipo j prodotta presso il reparto i .

● Vincoli

- > Capacità produttiva

$$0,18x_{1A} + 0,21x_{1B} + 0,24x_{1C} \leq 90$$

$$0,20x_{2A} + 0,18x_{2B} + 0,21x_{2C} \leq 85$$

$$0,12x_{3A} + 0,22x_{3B} + 0,23x_{3C} \leq 80$$

- > Limiti di produzione

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 0,5(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 0,7(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$

- > Non negatività

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \geq 0$$

Esercizio (Itaca)

● **Funzione obiettivo**

$$18(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 21(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) + 24(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C})$$

● **Soluzione**

$$x_{1A}^* = 64,63; \quad x_{1B}^* = 0; \quad x_{1C}^* = 326,53;$$

$$x_{2A}^* = 0; \quad x_{2B}^* = 0; \quad x_{2C}^* = 404,76;$$

$$x_{3A}^* = 666,67; \quad x_{3B}^* = 0; \quad x_{3C}^* = 0$$

$$z^* = 24992,18 \text{ €}$$

Template di riferimento per i modelli di pianificazione della produzione

Nel caso di risorse alternative il template di riferimento è

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=1}^m x_{ij}$$

s. v

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i, = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Modelli di miscelazione

- Nei problemi di miscelazione si dispone di un insieme di materie prime («ingredienti»), ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati «componenti».
- L'obiettivo è miscelare gli ingredienti, secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito («miscela»), che soddisfi determinati requisiti di qualità, esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti nella miscela.
- Il più classico problema di miscelazione è il problema della dieta. Tuttavia, dal punto di vista economico, si trovano numerose applicazioni industriali del problema di miscelazione nelle industrie alimentari, siderurgiche, chimiche.

Modelli di miscelazione

- ◉ **Variabili di decisione** corrispondono al contenuto di ciascun ingrediente nella miscela.
- ◉ **Vincoli** sono tipicamente associati alle caratteristiche di qualità della miscela (che dipende dai componenti presenti negli ingredienti utilizzati) e alle disponibilità limitate degli ingredienti.
- ◉ **Funzione obiettivo** è rappresentata dal costo degli ingredienti impiegati.

Primo esempio di miscelazione

Un'industria conserviera deve produrre dei succhi di frutta miscelando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti in termini di contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zuccheri. La polpa di frutta ed il dolcificante sono acquistati al prezzo di 2 e 3 euro (all'etto), rispettivamente. Inoltre, dalle etichette si ricavano i seguenti contenuti (per etto) riportati in Tabella. Determinare le quantità di polpa e di zucchero da utilizzare nella produzione del succo in modo da minimizzare il costo complessivo derivante dall'acquisto dei componenti di base.

	Polpa di frutta	Zucchero	Requisiti
Vitamina C	140 mg	-	70 mg
Sali minerali	20 mg	10 mg	30 mg
Zucchero	25 g	50 g	75 g

Soluzione

- **Variabili di decisione**

x_j , $j = 1, 2$ quantità (in etti) di ingredienti da miscelare per la produzione del succo

- **Vincoli**

- > *Qualità*

$$140x_1 \geq 70 \text{ (vitamina C)}$$

$$20x_1 + 10x_2 \geq 30 \text{ (Sali minerali)}$$

$$25x_1 + 50x_2 \geq 75 \text{ (zucchero)}$$

- > *Non negatività*

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- **Funzione obiettivo**

$$\text{Max } z(x) = 2x_1 + 3x_2$$

Esercizio (Ansalmecc)

La Ansalmecc, azienda leader nella produzione dell'acciaio, ha di recente analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro con l'obiettivo di realizzare un dato quantitativo di acciaio 18/10. I dati raccolti sono riportati in Tabella unitamente al peso complessivo disponibile di ciascun lotto e al costo unitario di acquisto.

Componente	Ingrediente					
	Rottame 1 [%]	Rottame 2 [%]	Rottame 3 [%]	Rottame 4 [%]	Rottame 5 [%]	Rottame 6 [%]
Ferro	93	76	74	65	72	68
Nichel	5	13	11	16	6	23
Cromo	0	11	12	14	20	8
Impurità	2	0	3	5	2	1
Peso [q]	30	90	50	70	60	50
Costo [€]	50	100	80	85	92	115

Tabella 2.3 Dati relativi al problema di miscelazione della Ansalmecc.

Esercizio (Ansalmecc)

L'obiettivo dell'azienda è quello di produrre, al costo minimo, 100 quintali di acciaio 18/10 con una presenza del 18% di cromo, 10% di nichel, almeno il 65% di ferro e al più un 1% di impurità.

Esercizio (Ansalmecc)

◉ Variabili di decisione

x_j , $j = 1, \dots, 6$, quantità (in quintali) di rottame di tipo j da utilizzare per la produzione dell'acciaio.

◉ Vincoli

> *Produzione*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

> *Qualità dell'acciaio*

$$0,93x_1 + 0,76x_2 + 0,74x_3 + 0,65x_4 + 0,72x_5 + 0,68x_6 \geq 65 \text{ (ferro)}$$

$$0,05x_1 + 0,13x_2 + 0,11x_3 + 0,16x_4 + 0,06x_5 + 0,23x_6 = 18 \text{ (nichel)}$$

$$0,11x_2 + 0,12x_3 + 0,14x_4 + 0,20x_5 + 0,08x_6 = 10 \text{ (cromo)}$$

$$0,02x_1 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,02x_5 + 0,01x_6 \leq 1 \text{ (impurità)}$$

> *Disponibilità limitata*

$$x_1 \leq 30; x_2 \leq 90; x_3 \leq 50; x_4 \leq 70; x_5 \leq 60; x_6 \leq 50$$

> *Non negatività*

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Esercizio (Ansalmecc)

- *Funzione obiettivo*

$$\min z(x) = 50x_1 + 100x_2 + 80x_3 + 85x_4 + 92x_5 + 115x_6$$

- *Soluzione*

$$x_1^* = 0; x_2^* = 40,18; x_3^* = 0; x_4^* = 9,59; x_5^* = 1,83;$$

$$x_6^* = 48,40;$$

$$z^* = 10567,58$$

Template di riferimento per i modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità di ciascuno degli m componenti.

Si indichi, in particolare, con

- > a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la quantità di componente i presente nell'ingrediente j ;
- > b_i , $i = 1, \dots, m$, la quantità minima di componente i presente nella miscela.
- > c_j , $j = 1, \dots, n$, il costo unitario dell'ingrediente j
- > x_j , $j = 1, \dots, n$, variabile di decisione corrispondenti alla quantità di ingrediente j presente nella miscela da realizzare

Template di riferimento per i modelli di miscelazione

Il modello di PL è il seguente:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s. v

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Modelli di miscelazione

Ulteriori vincoli potrebbero essere necessari.

Ad esempio, nel caso in cui sia richiesto che un dato componente i sia presente nella miscela in un quantitativo non superiore a un valore prefissato d_i , occorre imporre che:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq d_i$$

In altri casi, potrebbero essere imposte limitazioni u_j sul massimo quantitativo di ingrediente j da utilizzare per realizzare la miscela:

$$x_j \leq u_j$$

Modelli di miscelazione

Nel caso in cui sia necessario produrre un quantitativo prefissato q di miscela, occorre aggiungere il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^n x_j = q$$

Nel caso in cui il numero di miscele da realizzare siano $p > 1$, il modello generale di miscelazione si modifica in accordo alla scelta delle variabili di decisione, che, in questo caso, sono del tipo x_{jk} , $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di ingrediente j necessaria per realizzare la miscela k .

Esercizio (Baraldi)

Baraldi è un'industria chimica veneta che produce due tipi di concimi, A e B, che si differenziano per il diverso contenuto di azoto e ferro.

Il concime di tipo A deve contenere almeno il 25% di azoto e almeno il 10% di ferro, mentre il concime di tipo B deve contenere esattamente il 20% di azoto e almeno il 16% di ferro.

I concimi si ottengono facendo reagire dei composti contenenti azoto e ferro. L'industria dispone di 30000 kg di composto 1, acquistato al prezzo di 3 €/kg, e di 25000 kg di composto 2, acquistato al prezzo di 4 €/kg.

Il composto 1 contiene il 40% di ferro e il 50% di azoto, il composto 2 contiene il 6% di ferro e il 70% di azoto.

Deve essere prodotto un lotto di 40000 kg di concime di tipo A e 50000 kg di concime di tipo B al costo minimo di produzione.

Esercizio (Baraldi)

- ◉ *Variabili di decisione*

x_{ij} , $i = 1, 2$, $j = A, B$, quantità di composto i necessaria per produrre il concime di tipo j .

- ◉ *Vincoli*

- > Vincoli sul peso

$$x_{1A} + x_{2A} = 40000$$

$$x_{1B} + x_{2B} = 50000$$

- > Qualità del concime di tipo A

$$0,5x_{1A} + 0,7x_{2A} \geq 10000$$

$$0,4x_{1A} + 0,06x_{2A} \geq 4000$$

- > Qualità del concime di tipo B

$$0,5x_{1B} + 0,7x_{2B} = 10000$$

$$0,4x_{1B} + 0,06x_{2B} \geq 8000$$

Esercizio (Baraldi)

⊙ *Vincoli*

- > Vincoli sulla disponibilità delle risorse

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 30000$$

$$x_{2A} + x_{2B} \leq 25000$$

- > Vincoli di non negatività

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0$$

⊙ *Funzione obiettivo*

$$\min z(x) = 3(x_{1A} + x_{1B}) + 4(x_{2A} + x_{2B})$$

Modelli multiperiodo

I modelli di PL multiperiodo consentono di assumere decisioni riguardanti un orizzonte temporale più lungo, che si assume discreto e suddiviso in T periodi di tempo.

Tali modelli possono riguardare differenti contesti.

Per semplicità si farà riferimento soltanto al caso della pianificazione della produzione multiperiodo di un unico prodotto.

Per formulare il modello, si indichi con $t, t = 1, \dots, T$, il generico periodo dell'orizzonte temporale di pianificazione. Per ogni $t, t = 1, \dots, T$, si assumono note la quantità d_t richiesta di prodotto e il costo unitario c_t di produzione.

Modelli multiperiodo

In ogni periodo di tempo è possibile immagazzinare le quantità di prodotto non vendute e che faranno parte della disponibilità di prodotto per i periodi successivi.

Il costo unitario di stoccaggio si suppone noto e pari a $h_t, t = 1, \dots, T$.

Il problema consiste nel determinare le quantità di prodotto da realizzare in ciascun periodo dell'orizzonte di pianificazione, in modo da soddisfare le richieste della clientela in ogni periodo di tempo, minimizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio.

Modelli multiperiodo

Le variabili di decisione sono rappresentate da x_t , $t = 1, \dots, T$, ciascuna delle quali indicante la quantità di prodotto da realizzare al periodo di tempo t .

Inoltre, si indichi con I_t , $t = 1, \dots, T$, la quantità di prodotto stoccata al periodo di tempo t . Tali variabili sono dipendenti dalle variabili x_t , $t = 1, \dots, T$, dal momento che, per ogni periodo di tempo t , $t = 1, \dots, T$, valgono le seguenti relazioni (vincoli di «bilanciamento»):

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t$$

per le quali si assume noto il valore I_0 , cioè, il livello iniziale di scorta di prodotto.

Modelli multiperiodo

In taluni casi si assume che debba essere nullo il livello delle scorte di prodotto al termine della pianificazione, cioè, $I_T = 0$. Oltre ai vincoli di bilanciamento, sono presenti le condizioni di non negatività sulle variabili di decisione, mentre la funzione obiettivo consiste nella minimizzazione della somma dei costi di produzione e di stoccaggio, cioè, in termini formali,

$$z(x, I_t) = \sum_{t=1}^T (c_t x_t + h_t I_t)$$

Di seguito il modello complessivo:

Modelli multiperiodo

$$\min z(x, I_t) = \sum_{t=1}^T (c_t x_t + h_t I_t)$$

s. v.

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t, t = 1, \dots, T$$

$$x_t, I_t \geq 0, t = 1, \dots, T$$

Modelli multiperiodo

In tale modello possono essere inseriti anche vincoli sulla capacità produttiva o sul livello di scorte per ogni periodo di tempo, cioè,

$$\begin{aligned}x_t &\leq u_t \\I_t &\leq S_t\end{aligned}$$

per qualche $t = 1, \dots, T$, dove u_t e S_t sono, rispettivamente, la capacità produttiva e il massimo livello di scorte ammesso al periodo di tempo t .

Esercizio

Setelam, azienda livornese specializzata nella lavorazione dei lamierati, riceve una commessa per la produzione di lamierati di zinco di una data dimensione. La quantità richiesta deve essere fornita periodicamente, improrogabilmente alla fine di ogni mese. Le richieste su un orizzonte temporale di tre mesi sono riportate nella Tabella 2.8.

	Periodo		
	1	2	3
Domanda	270	290	250
Capacità	250	220	280
Costo unitario di produzione [€]	12	14	16
Costo unitario di stoccaggio [€]	1,2	1,1	0,9

Tabella 2.8 Dati relativi al problema di produzione multiperiodo della Setelam.

Esercizio

Per la lavorazione dei lamierati si utilizza un unico impianto di produzione a ciclo continuo di capacità limitata. La seconda riga della Tabella 2.8 riporta il numero massimo di pezzi di lamiera che possono essere prodotti mensilmente.

Le ultime due righe riportano, invece, i costi unitari di produzione e quelli di stoccaggio.

Nel magazzino sono presenti inizialmente 100 lamiere di zinco della dimensione desiderata.

Esercizio

Per definire per ogni mese dell'orizzonte di pianificazione il piano di produzione che consenta di minimizzare i costi totali, si scelgono le seguenti variabili di decisione: $x_t, t = 1,2,3$, pari al numero di lamiere di zinco prodotte durante il mese t e $I_t, t = 1,2,3$, corrispondente al livello delle scorte alla fine del mese t .

I vincoli di bilanciamento sono i seguenti:

$$x_1 + 100 - I_1 = 270;$$

$$x_2 + I_1 - I_2 = 290;$$

$$x_3 + I_2 - I_3 = 250.$$

Esercizio

Oltre ai vincoli di non negatività sulle variabili di decisione,

$$x_1, x_2, x_3, I_1, I_2, I_3 \geq 0,$$

occorre considerare le restrizioni sulla capacità produttiva

$$x_1 \leq 250; x_2 \leq 220; x_3 \leq 280.$$

La funzione obiettivo $z(x, I)$, da minimizzare, è data dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio

$$z(x, I) = 12x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 1,2I_1 + 1,1I_2 + 0,9I_3.$$

Esercizio

La soluzione ottima del problema è:

$$x_1^* = 250; x_2^* = 220; x_3^* = 240; I_1^* = 80 ; I_2^* = 10 ; I_3^* = 0;$$

a cui corrisponde un valore ottimo pari a $z^* = 10027$.