BUSINESS ANALYTICS AND DECISIONS THEORY

Introduzione alla Ricerca Operativa
A.A. 2018-2019

Ricerca Operativa

- La **Ricerca Operativa** (nota anche come teoria delle decisioni, scienza della gestione o, in inglese, operations research -"Operational Research" in Europa) fornisce gli strumenti matematici di supporto ai processi decisionali con cui occorre gestire e coordinare attività e risorse limitate al fine di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo.

- La RO si occupa di formalizzare un problema in un modello matematico e di determinare la scelta migliore per raggiungere un determinato obiettivo rispettando vincoli che sono imposti dall'esterno e non sono sotto il controllo di chi deve compiere le decisioni.

Ricerca Operativa

- La RO si può ricondurre all'ambito della matematica applicata ma presenta forti caratteristiche interdisciplinari relative in prevalenza a matematica, informatica, economia e finanza, ingegneria ed altre.

- Trova applicazione in numerosi contesti
  - Energia
  - Trasporti e Logistica
  - Finanza
  - Produzione
  - …..

Problemi e Modelli

- Modello

Strumento per «decodificare» un problema reale

- Proprietà dei modelli
  - Astrazione
  - Sintesi (solo caratteristiche rilevanti)

Classificazione dei modelli

- Modelli icastici

  Riproduzione per similitudine (plastico)

- Modelli analogici

  Riproduzione per analogia (galleria del vento)

Classificazione dei modelli

- Modelli Logico-matematici

  Riproduzione tramite relazioni logico-matematiche

- Classificazione
  - Rispetto all’evoluzione temporale
    - Statici
    - Dinamici
  - Rispetto alla presenza di elementi aleatori
    - Deterministici
    - Stocastici

Il lupo, la capra ed il cavolo

Un contadino deve portare aldilà del fiume una capra, un cavolo e un lupo, ma la barca che ha a disposizione è troppo piccola e può contenere al massimo lui stesso e uno solo degli elementi elencati. Il problema è che: se lascia soli capra e lupo, questi si mangia la capra, a meno che il contadino non li sorvegli, se lascia "soli" capra e cavolo, la capra si mangia il cavolo (a meno che il contadino non li sorvegli)

- Modello matematico che utilizza un grafo G=(N,A)
- Nodi : stati ammissibili
- Archi: passaggio da uno stato all'altro

Soluzione del problema

- P : Pastore
- L : Lupo
- C : Capra
- Ca : Cavolo

Riva di Partenza	Riva di Arrivo
P L C Ca	-
L Ca	P C
P L Ca	C
L	P C Ca
P L C	Ca
C	P L Ca
P C	L Ca
-	P L C Ca

L’approccio modellistico per problemi decisionali

Metodo a 5 fasi

1. Identificazione del problema
2. Raccolta dati
3. Formulazione del problema
4. Soluzione del problema
5. Validazione della soluzione

1. Identificazione del problema

Viene descritto il problema in linguaggio naturale, identificando l’oggetto della decisione e gli aspetti rilevanti da tenere in considerazione.

L’approccio modellistico per problemi decisionali

2. Raccolta dati

Vengono raccolte tutte le informazioni ritenute utili alla soluzione del problema

3. Formulazione del problema

Il problema viene descritto in termini matematici costruendo un «modello di ottimizzazione»

4. Soluzione del problema

Viene determinata una soluzione ottima del problema, oppure, si stabilisce che il problema è «inammissibile» (o «illimitato»).

L’approccio modellistico per problemi decisionali

5. Validazione della soluzione

Un errore nella formulazione potrebbe portare a una soluzione ammissibile per il modello di ottimizzazione ma non per il problema reale che si vuole risolvere: si rende quindi necessaria una quinta fase di «validazione» della soluzione ottenuta, che se insoddisfacente porta ad una «revisione » del modello formulato.

Vantaggi e Svantaggi dell'approccio modellistico

- Vantaggi
  - Maggiore comprensione del problema
  - Possibilità di eseguire delle simulazioni
- Svantaggi
  - Difficoltà di quantificare alcuni dati del modello
  - Incertezza nei dati

Il modello è uno strumento di ausilio al processo decisionale

Importanza della fase di revisione

Formulazione di un problema di ottimizzazione

- Problema di ottimizzazione

  Processo di selezione della «migliore decisione» tra un insieme di scelte ammissibili
- Esempio

  Aziende leader nel settore manifatturiero deve decidere il piano di produzione ottimale in modo da soddisfare una data domanda considerando una disponibilità limitata di materie prime e minimizzando il costo complessivo

- Costruzione del modello matematico

1. Variabili
   - Esogene (parametri del problema)
   - Endogene (variabili di decisione)
2. Vincoli
3. Funzione obiettivo

Formulazione dei modelli di ottimizzazione

- Nel nostro esempio
  - Parametri → richiesta e costo delle materie prime, domanda
  - Decisioni → prodotti da realizzare
  - Vincoli → domanda da soddisfare
  - Funzione obiettivo → costo da minimizzare

- In termini matematici
  - x → decisioni
  - X → insieme di ammissibilità (decisioni che soddisfano i vincoli)
  - $\mathrm{Z(x)}$ → funzione di costo

Problemi di ottimizzazione

- Rappresentazione implicita

$$\min \; z(x)$$
$$\text{s. v.}$$
$$x \in X$$

N.B. si può parlare indifferentemente di problema di «massimo» o di «minimo», dal momento che una soluzione x^* che renda minima la funzione $z(x)$, massimizza al tempo stesso la funzione $-z(x)$.

Problemi di ottimizzazione

- Rappresentazione esplicita

  Si assume che la regione ammissibile X sia descritta tramite un insieme finito di m vincoli funzionali del tipo $g_i(x) \geq b_i,\ i = 1, \dots, m$,

  con $x \in R^n$ e $g_i: R^n \to R, i = 1, \dots, m$

$$
\begin{aligned}
&\min\ z(x) \\
&\text{s.v.} \\
&\qquad g_i(x) \geq b_i,\ i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

Esiti della soluzione di un problema di ottimizzazione

- Esistenza di una soluzione ottima

  Esiste una soluzione ammissibile $x^* \in X$ tale $z(x^*) \leq z(x)$, per ogni $x \in X$, mentre $z(x^*)$ è detto «ottimo» o valore ottimo

- Problema inammissibile

  L'insieme X è vuoto

- Problema illimitato

  per ogni $k > 0$, esiste una soluzione $x \in X$ tale che $z(x) < -k$

Classificazione dei modelli di ottimizzazione

- Modello matematico

  Variabili + Vincoli + Funzione obiettivo
  - Variabili : sempre presenti
  - Vincoli : vincolati e non vincolati
  - Funzione obiettivo: senza obiettivo, uno o più obiettivi

- Classificazione
  - Rispetto alle variabili
    - Continua -> variabili assumo valori reali
    - Discreta -> le variabili assumono valori interi (eventualmente binarie)
  - Rispetto alla funzione di vincolo e/o obiettivo
    - Lineare -> z(x) e $g_i(x)$ sono funzioni lineari
    - Non lineare -> z(x) e/o $g_i(x)$ sono funzioni non lineari

Inserire qui il logo

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

- Nel corso faremo principalmente riferimento ai modelli di PL
- Un modello di PL si ottiene assumendo che funzione obiettivo e vincoli nel modello generale siano lineari
- Il modello di PL può essere scritto come:

$$\min z(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.v$$

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Richiami di Algebra Lineare

Definizione

Un «**vettore**» $x \in R^n$ è un insieme ordinato di *n* scalari disposti convenzionalmente per colonna, e può essere rappresentato pertanto nel seguente modo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Il vettore si può rappresentare anche per riga, utilizzando l'operatore di «**trasposizione**», che si denota con un apice «T», cioè,

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

Vettori e matrici

- Esempio

Lo **scalare** x_j, $j = 1, \dots, n$, rappresenta la *j-esima* componente del vettore x.

Il vettore di $\Re^3$

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

è rappresentato per colonna.

In alternativa, si può scrivere $x^T = [-4\ 5\ 3]$.

Le componenti del vettore sono $x_1 = -4, x_2 = 5\ e\ x_3 = 3.$

Vettori e matrici

Il «**prodotto scalare**» di due vettori $x, c \in R^n$ è lo scalare $\boldsymbol{p} \in \Re$ ottenuto come:

$$z = c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- Esempio I due vettori

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hanno prodotto scalare z pari a

$$z = [(-4) \text{ x } 5] + [5 \text{ x } (-6)] + (3 \text{ x } 0) = -50.$$

Vettori e matrici

Una «**matrice**» $A \in \Re^{m \times n}$, detta anche matrice $(m \ x \ n)$, è una tabella ordinata di $(m \ x \ n)$ scalari disposti in m *righe* e n *colonne* nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vettori e matrici

Lo scalare $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, è la componente della *matrice* A in riga *i* e colonna *j*.

Il vettore $A_j \in \Re^m, j = 1, \dots, n$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

individua la *j-esima colonna* della matrice *A*, mentre il vettore $a_i^T \in \Re^n, i = 1, \dots, m$

$$a_i^T = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$$

individua la *i-esima riga* della matrice *A*.

Vettori e matrici

- Esempio

Sia $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ una matrice di $\Re^{3\times 4}$.

La componente in riga 2 e colonna 3 è $a_{23} = 5$.

Tale matrice è formata dai vettori colonna

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e dai vettori riga

$$a_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a_2^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, a_3^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prodotto matrice e vettore

Il prodotto di una matrice $A \in \Re^{m \times n}$ e di un vettore $x \in R^n$ si può scrivere come:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

o

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad i = 1, \ldots., m$$

Introduzione alla PL

- In forma compatta un problema di PL si può scrivere come:

$$\min z(x) = c^{\mathrm{T}}x$$

s.v.

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Introduzione alla PL

dove:

- $c \in R^n$ (vettore dei coefficienti della funzione obiettivo o vettore dei coefficienti di «costo», essendo la funzione obiettivo da minimizzare);
- $b \in R^m$ (vettore dei termini noti dei vincoli, vettore delle «risorse»);
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

(matrice (*m* x *n*) dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli, matrice dei «coefficienti tecnologici»).

Introduzione alla PL

L'ipotesi di linearità nei modelli di PL potrebbe non essere ragionevole in molte applicazioni pratiche:

- caso degli sconti di quantità (economie di scala) per acquisti di grossi quantitativi di merce;
- modelli di imposizione fiscale nei quali a imponibili via via crescenti corrispondono differenti percentuali di prelievo.

Tuttavia, anche in questi casi, i modelli di PL rappresentano comunque una buona base di partenza per successive elaborazioni.

Approcci di formulazione

- Da template di riferimento – classi di problemi
  - Mix produttivo, miscelazione, Scorte, Reti …
- Costruttivo
  - Variabili + Vincoli + Funzione obiettivo

Esercizio (atleta)

Un atleta, in prossimità di una gara, deve perdere peso senza perdere massa muscolare durante gli allenamenti. Il proprio regime alimentare giornaliero prevede l'assunzione di carne, legumi e pasta, conditi con olio. Di seguito è riportato il contenuto in grassi, carboidrati e proteine di ciascuno di questi alimenti, il loro contenuto calorico e la minima richiesta nutrizionale di ciascun macronutriente.

Macronutriente	Alimento: Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884	–

Tabella 1.1 Dati relativi al problema della dieta dell'atleta.

Esercizio (atleta)

Occorre stabilire il regime dietetico giornaliero che garantisce all'atleta un apporto nutrizionale non inferiore a quello richiesto, con il minimo apporto calorico.

Esercizio (atleta)

- **Variabili di decisione**
  - $x_j, j = 1, \ldots, 4$, corrispondono alla quantità giornaliera (espressa in etti) di alimento j (1 = carne, 2 = legumi, 3 = pasta, 4 = olio) che deve entrare nella dieta.
- ***Vincoli***
  - Minima richiesta nutrizionale

    Se 100g di carne contengono 2,6g di grassi, si può determinare l'apporto di grassi (in g) proveniente da x_1 etti di carne pari a $2{,}6x_1$.

1. $2{,}6x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 + 100x_4 \geq 30$
2. $60{,}7x_2 + 74{,}7x_3 \geq 90$
3. $20{,}2x_1 + 22{,}3x_2 + 13x_3 \geq 60$

- **Vincoli di non negatività**

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Esercizio (atleta)

- ***Funzione obiettivo***

$$\text{min } z(x) = 110x_1 + 337x_2 + 371x_3 + 884x_4$$

- ***Soluzione del problema***
  - $x_1^* = 1{,}3335$; $x_2^* = 1{,}4827$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0{,}2431$
  - $z^* = z(x^*) = 861{,}2416$ Kcal