ESERCIZI SULLO STUDIO DI FUNZIONI

10 novembre 2016

1 Esercizi

Esercizio n.1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{7}{x^2+1} - 3$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Intersezioni con gli assi:

Intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{7}{x^2+1} - 3. \end{cases}$$

$$\frac{7-3x^2-3}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \frac{4-3x^2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 4-3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto i due punti di intersezione con l'asse x sono $A(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ e $B(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

Intersezioni con l'asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{7}{x^2+1}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $C(0, 4)$.

Positivitá

Poniamo la funzione $f(x) = \dfrac{4-3x^2}{x^2+1} > 0$. Essendo il denominatore una quantitá positiva, studiamo solo il segno del numeratore: $4 - 3x^2 > 0$. Pertanto la funzione é positiva per $x < -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ o per $x > \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; la funzione é negativa per $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Simmetrie

La funzione é pari; infatti:
$f(-x) = \dfrac{7}{(-x)^2+1} - 3 = \dfrac{7}{x^2+1} - 3 = f(x)$.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x^2+1} - 3 = -3$
$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{7}{x^2+1} - 3 = -3$
pertanto la retta $y = -3$ é un asintoto orizzontale.

Massimi e minimi

Si passa allo studio della derivata prima.
$f'(x) = \dfrac{-7(2x)}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{14x}{(x^2+1)^2}$.
Pertamto si ha:

$f'(x) = 0$ se $x = 0$

$f'(x) > 0$ se $x > 0$

$f'(x) < 0$ se $x < 0$

Si ha, quindi, che il punto $M(0,4)$ é un punto di massimo per la funzione.

Concavitá

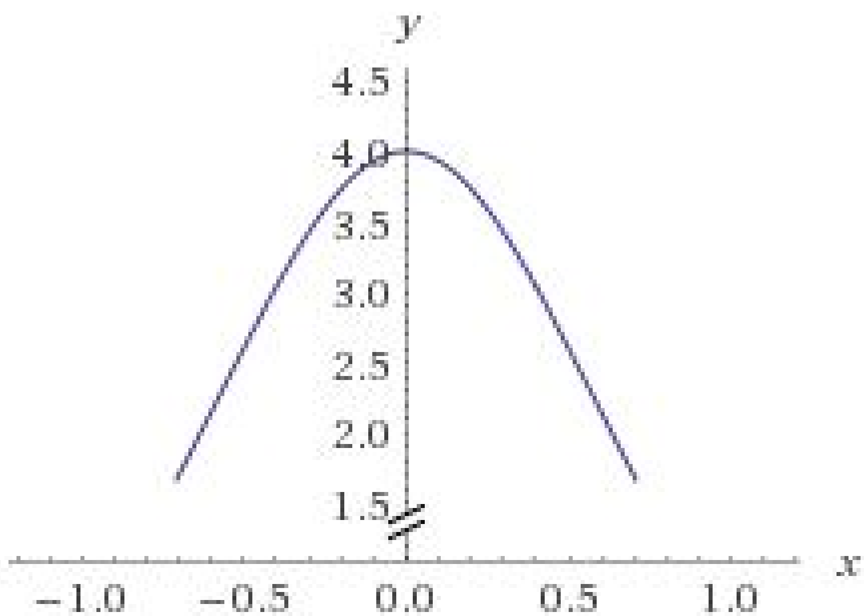
Si passa allo studio della derivate seconda.
$f'' = \dfrac{-14(x^2+1)^2 + 14x(2(x^2+1))2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{(x^2+1)[-14(x^2+1)+56x^2]}{(x^2+1)^4} = \dfrac{42x^2-14}{(x^2+1)^3}$.
Pertamto si ha:

$f''(x) = 0$ se $x = \pm\frac{1}{3}$

$f''(x) > 0$ se $x < -\frac{1}{3}$ o $x > \frac{1}{3}$

$f''(x) < 0$ se $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

I punto $F_1(-\frac{1}{3}, \frac{53}{10})$ e $F_2(\frac{1}{3}, \frac{53}{10})$ sono punti di flesso.



Esercizio n.2
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

Dominio.
Poiché la funzione é razionale fratta, per determinare il dominio si vanno a ricercare quei vaori che non annullano. Risolvendo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ si ottiengono le soluzioni $x = -2$ e $x = 1$. Pertanto il dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Intersezioni con gli assi:
Non presenta intersezioni con l'asse x in quanto il numeratore, essendo un numero, non si annulla mai.

Intersezioni con l'asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $A(0, -\frac{1}{2})$.

Positivitá
Poniamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2} > 0$. Essendo il numeratore una quantitá positiva, studiamo solo il segno del denominatore: $x^2 + x - 2 > 0$. Pertanto la funzione é positiva per $x < -2$ o per $x > 1$; la funzione é negativa per $-2 < x < 1$.

Simmetrie
La funzione é pari; infatti:
$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - x - 2} = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$. Pertanto la funzione non é né pari né dispari.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 + x - 2} = 0$
$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 + x - 2} = 0$

pertanto la retta $y = 0$ é un asintoto orizzontale.
Calcoliamo i limiti nei punti esclusi dal dominio
$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2+x-2} = +\infty$
$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2+x-2} = -\infty$
$\lim_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x^2+x-2} = -\infty$
$\lim_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x^2+x-2} = +\infty$
Le rette $x = -2$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

Massimi e minimi
Si passa allo studio della derivata prima.
$f'(x) = \dfrac{-(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$.
Pertamto si ha:

$f'(x) = 0$ se $x = -\dfrac{1}{2}$

$f'(x) > 0$ se $x < -\dfrac{1}{2}$

$f'(x) < 0$ se $x > -\dfrac{1}{2}$

Si ha, quindi, che il punto $M(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{9})$ é un punto di massimo per la funzione.

Concavitá
Si passa allo studio della derivate seconda.

$$f'' = \frac{-2(x^2+x-2)^2 + (2x+1)(2(x^2+x-2))(2x+1)}{(x^2+x-2)^4} =$$
$$\frac{(x^2+x-2)[-2(x^2+x-2)+2(2x-1)^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{6(x^2+x+1)}{(x^2+x-2)^3}.$$

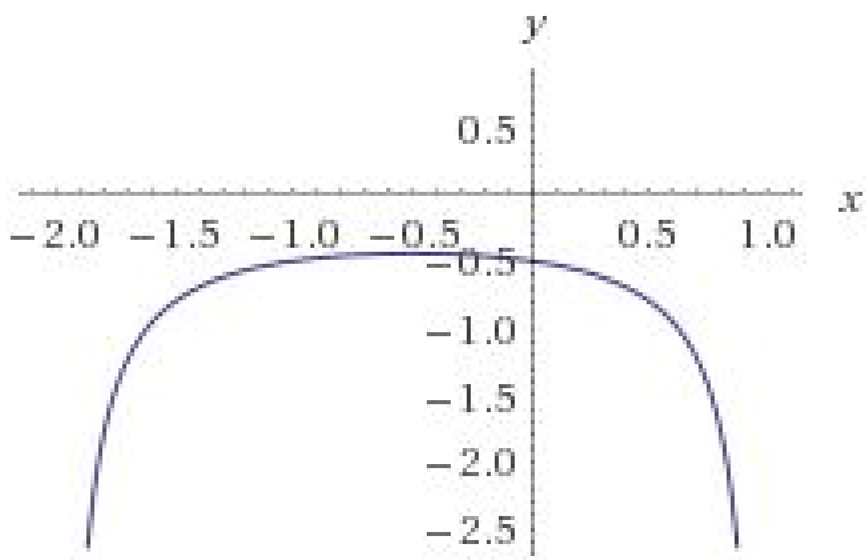
Pertamto si ha:

la $f''(x)$ non si annulla mai essendo il $\Delta < 0$

$f''(x) > 0$ se $x < -2$ o $x > 1$

$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 1$

La funzione non presenta punti di flesso.



Esercizio n.3

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{x^2-1}$$

Dominio.

La funzione é definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto anche il dominio dell'esponente é tutto $\mathbb{R}$.

Intersezioni con gli assi:

La funzione non presenta intersezioni con l'asse x in quanto l'equazione $e^{x^2-1} = 0$ non ammette soluzioni; infatti, la funzione esponenziale ha per codominio l'intervallo $(0, \infty)$.

Intersezioni con l'asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^2-1}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $A(0, -\frac{1}{2})$.

Positivitá

I valori assunti dalla funzione esponenziale sono i reali strettamente maggiori di zero, pertanto, la funzione in oggetto é positiva su tutto il suo dominio.

Simmetrie
La funzione é pari; infatti:
$f(-x) = e^{(-x)^2-1} = e^{x^2-1} = f(x)$.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti
$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2-1} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^{x^2-1} = +\infty$
La funzione, pertanto, non ammette asintoti orizzontali. Verifichiamo la presenza di un'eventuale asintoto obliquo del tipo $y = mx + q$.

Determiniamo il valore di m:
$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2-1}}{x} = +\infty$. Essendo il limite divergente, la funzione non ammette asintoto obliquo.

Massimi e minimi
Si passa allo studio della derivata prima.

$$f'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x.$$

Pertamto si ha:

$f'(x) = 0$ se $x = 0$

$f'(x) > 0$ se $x > 0$

$f'(x) < 0$ se $x < 0$

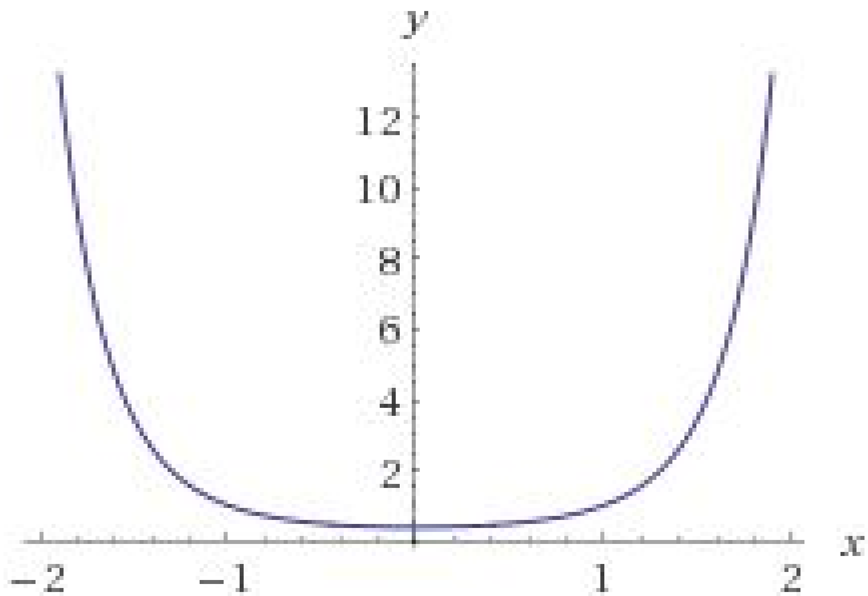
Si ha, quindi, che il punto $m(0, \frac{1}{e})$ é un punto di minimo per la funzione.

Concavitá
Si passa allo studio della derivate seconda.
$f'' = e^{x^2-1} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2-1} \cdot 2x = e^{x^2-1}(4x^2 + 2)$.
Pertamto si ha:

che la $f''(x)$ non si annulla mai essendo i fattori strettamente positivi

$f''(x) > 0$ per ogn $x \in D$.

La funzione non presenta punti di flesso.



Esercizio n.4
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$$

Dominio.
La funzione é definita su tutto $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, in quanto il dominio dell'esponente é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Intersezioni con gli assi:
La funzione non presenta intersezioni con l'asse x in quanto l'equazione $e^{\frac{x}{x+1}} = 0$ non ammette soluzioni; infatti, la funzione esponenziale ha per codominio l'intervallo $(0, \infty)$.
Intersezioni con l'asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x}{x+1}}. \end{cases}$$

Pertanto il punto di intersezione con l'asse y é $A(0, 1)$.

Positivitá

I valori assunti dalla funzione esponenziale sono i reali strettamente maggiori di zero, pertanto, la funzione in oggetto é positiva su tutto il suo dominio.

Simmetrie

La funzione non é né pari né dispari.

Comportamento della funzione agli estremi del dominio. Asintoti

$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}} = e^1 = e$
$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}} = e^1 = e$
Pertanto, la retta $y = e$ é un asintoto orizzontale.
$\lim_{x\to-1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$
$\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty$
Ne segue che la retta $x = -1$ é un asintoto verticale.

Massimi e minimi

Si passa allo studio della derivata prima.
$f'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2}$
Pertamto si ha:

la funzione $f'(x)$ non si annulla per nessun valore del dominio

$f'(x) > 0$ per ogni valore del dominio

La funzione non ammette né punti di massimo né punti di minimo.

Concavitá

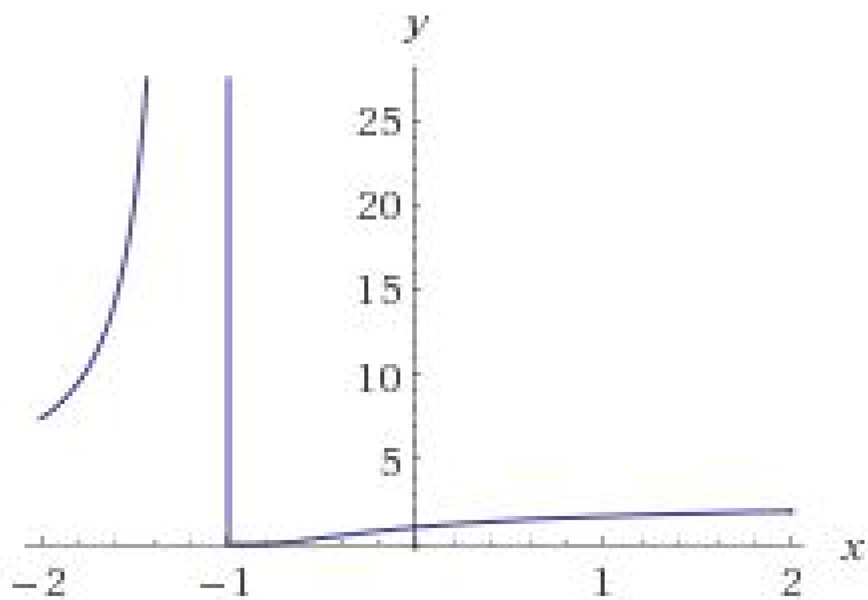
Si passa allo studio della derivate seconda.
$f'' = -\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}(2x+1)}{(x+1)^4}$
Pertamto si ha:

$f''(x) = 0$ se $x = -\frac{1}{2}$

$f''(x) > 0$ se $x < -\frac{1}{2}$

$f''(x) < 0$ se $x > -\frac{1}{2}$

La funzione presenta un punto di flesso in $x = -\frac{1}{2}$.


y
25
20
15
10
5
x
−2
−1
1
2