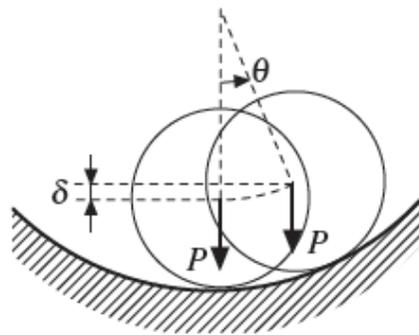
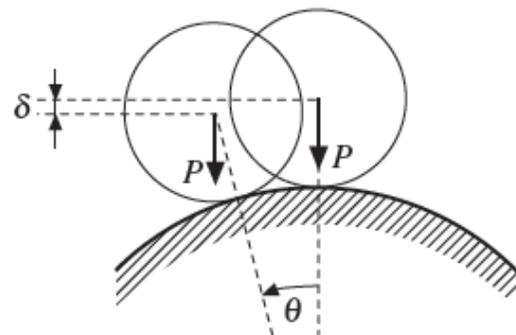


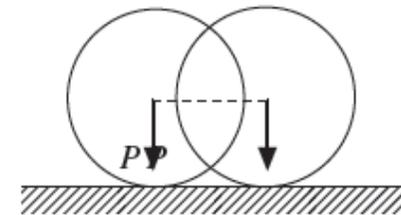
Non sempre è sufficiente verificare che le tensioni non superino in nessun punto i valori ammissibili per il materiale considerato. In certi casi può avvenire che l'**equilibrio** tra le forze esterne e le tensioni, pur sussistendo, sia **instabile** e che piccole perturbazioni dei carichi o imperfezioni geometriche della struttura ne provochino la perdita della capacità portante.



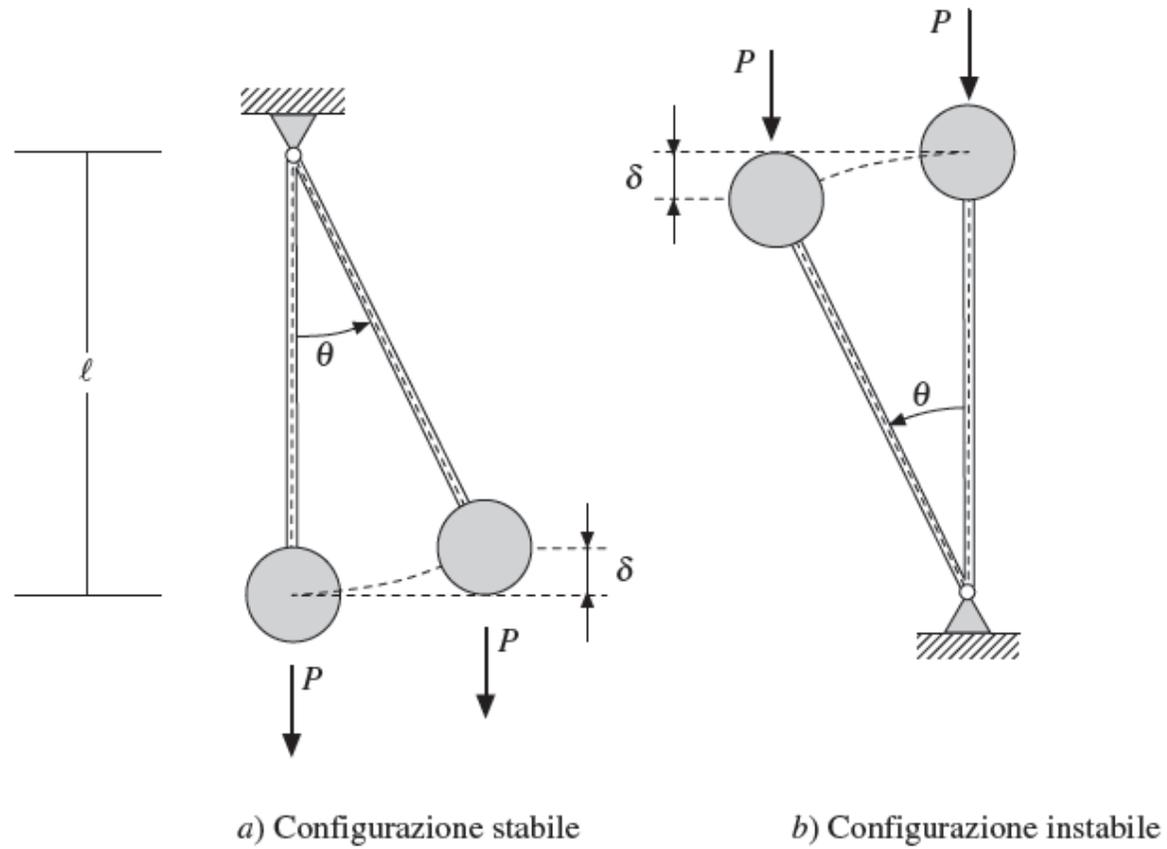
a) Equilibrio stabile



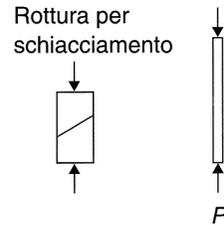
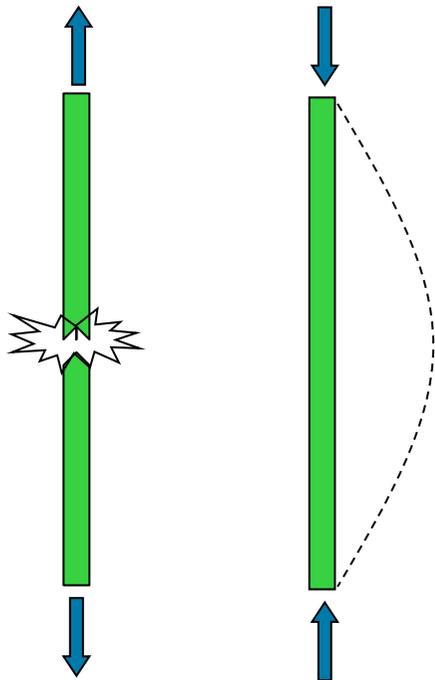
b) Equilibrio instabile



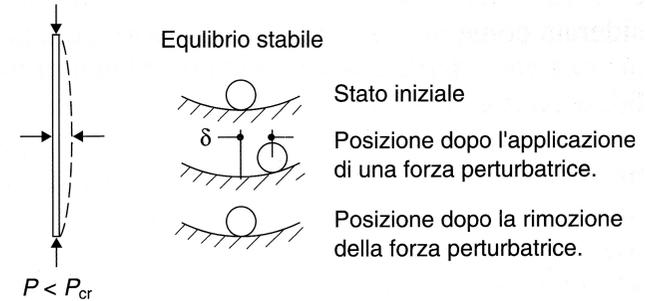
b) Equilibrio indifferente



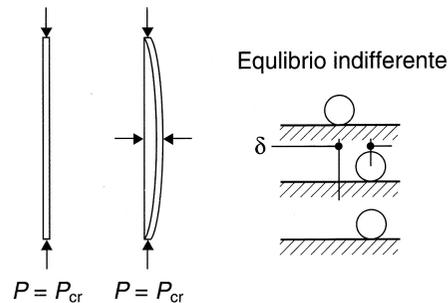
# Diversi tipi di collasso



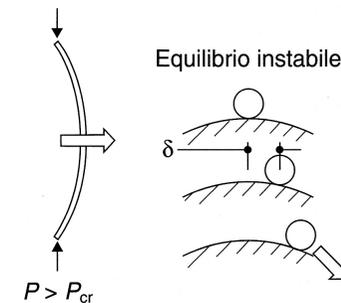
(a) Colonna tozza: l'elemento collassa per effetto di un'azione di schiacciamento. La sua resistenza dipende dall'area della sezione trasversale e dalla resistenza di schiacciamento del materiale utilizzato.



(b) Colonna snella (carico inferiore al carico di punta): l'elemento è in uno stato di equilibrio stabile. Se l'elemento viene spostato leggermente a metà altezza ritornerà alla propria configurazione originaria.

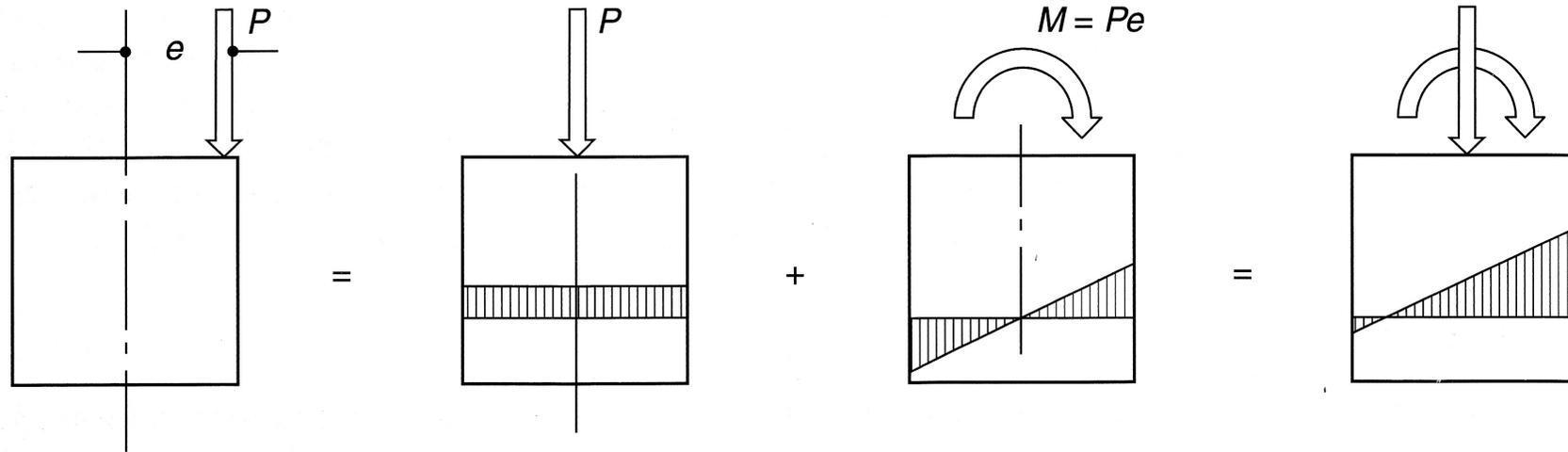


(c) Colonna snella (carico = carico di punta): quando il carico sulla colonna raggiunge il carico critico di punta, l'elemento passa ad uno stato di equilibrio neutro. Se l'elemento viene spostato dalla sua configurazione originale rettilinea, rimarrà nella nuova posizione e non tornerà indietro. Il carico di punta è il massimo carico che la colonna può reggere.

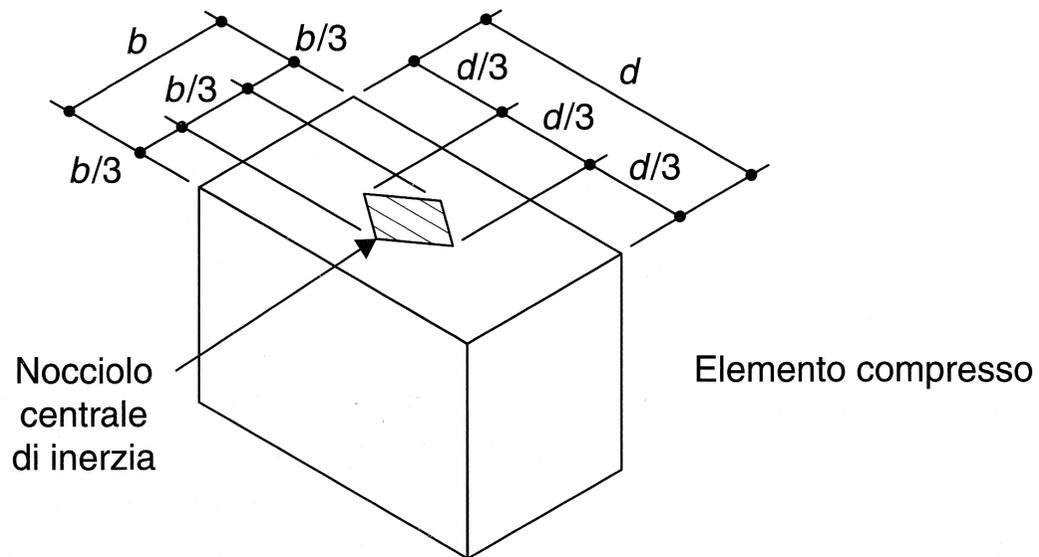
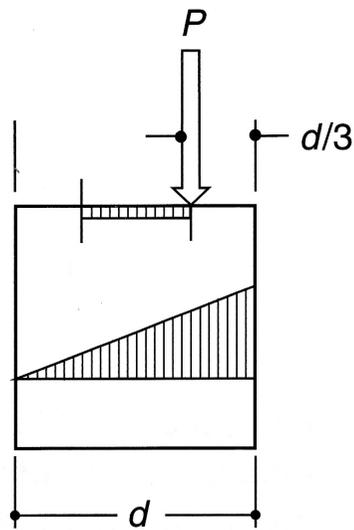


(d) Colonna snella (carico maggiore del carico di punta): se il carico agente sulla colonna viene aumentato oltre il carico critico di punta, l'elemento passa in uno stato di equilibrio instabile. L'elemento continuerà a deformarsi sotto il carico finchè finalmente si spezza.

# Colonne tozze (rottura per schiacciamento)



(a) Distribuzioni di sforzo per effetto di carichi eccentrici



# Colonne snelle e carico critico Euleriano

---

L'espressione analitica per il calcolo del carico critico di un'asta incernierata agli estremi è stata determinata dal matematico svizzero Leonhard Euler nel 1759. La relazione, detta Formula di Eulero, è la seguente

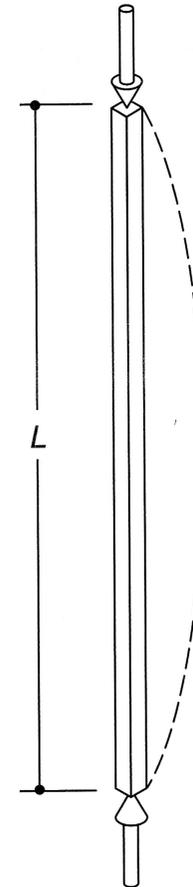
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

in cui:

$E$  è il modulo di elasticità del materiale

$I$  è il momento d'inerzia della sezione trasversale

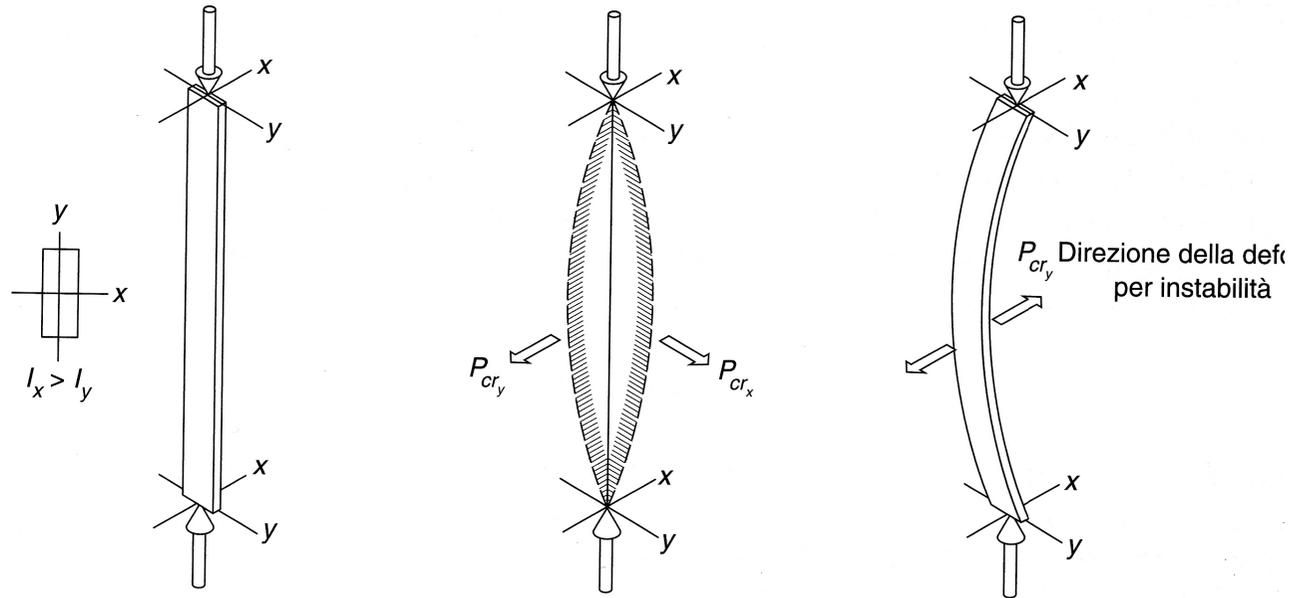
$L$  è la lunghezza dell'asta



# Colonne snelle e piano di minore rigidezza flessionale

Per sezioni generiche, l'instabilità si manifesta nel piano di minore rigidezza flessionale. La formula di Eulero si scrive

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$



(a) Il momento di inerzia attorno ad un asse è maggiore di quello attorno all'altro.

(b) L'elemento potenzialmente può collassare per instabilità attorno a qualsiasi asse. Il carico necessario per farlo instabilizzare attorno all'asse più forte, tuttavia eccede il carico che causa l'instabilità attorno all'asse più debole.

(c) Di conseguenza l'elemento si instabilizzerà con  $P_{cr_y} = \pi^2 EI_y / l$  nel modo illustrato.

# Le travi con condizioni di vincolo generiche

---

Il carico critico di un'asta di sezione costante può sempre scriversi nella forma

$$P_c = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell_0^2}$$

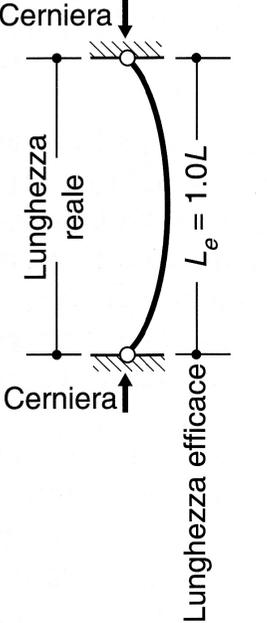
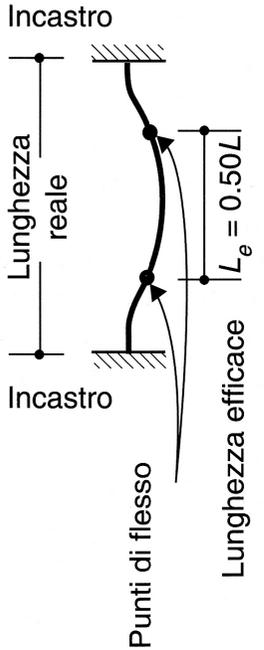
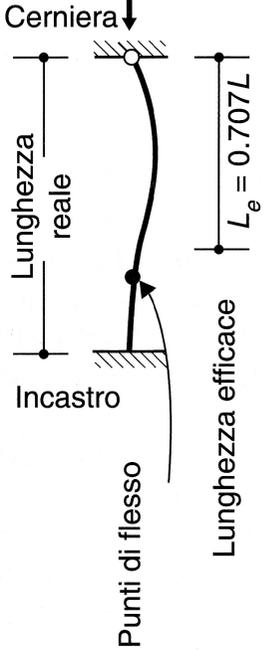
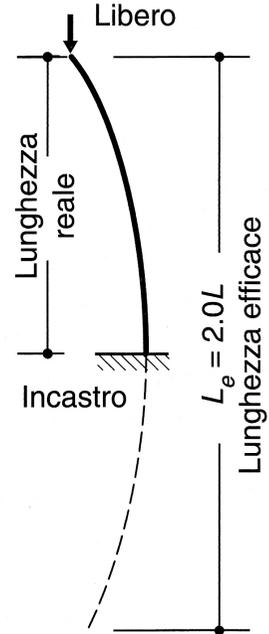
detta **formula di Eulero**, a patto di introdurre al posto della lunghezza effettiva della trave una lunghezza fittizia  $\ell_0$  che prende il nome di **lunghezza efficace o lunghezza libera di inflessione**.

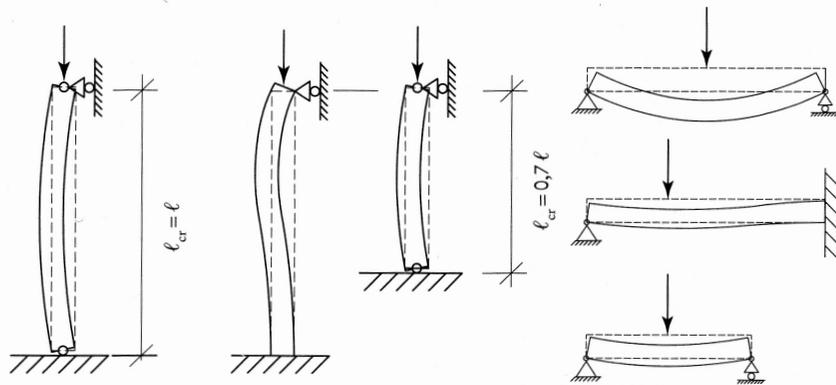
Questa quantità rappresenta la distanza tra due successivi punti di flesso della configurazione deformata e dipende dalle condizioni di vincolo di estremità.

In definitiva, il valore del carico critico dipende da:

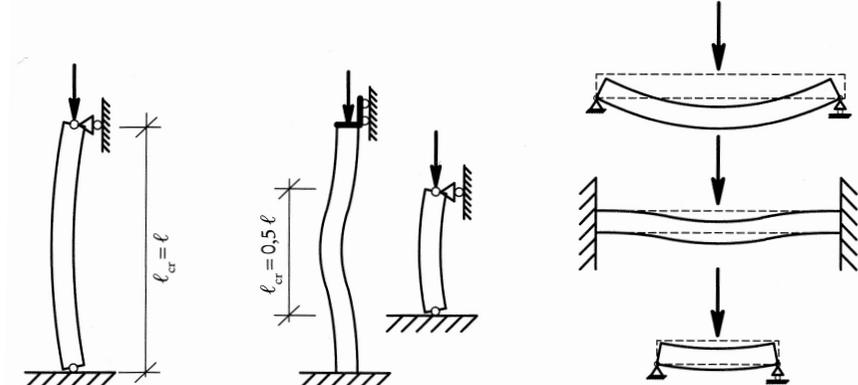
- rigidità del materiale ( $E$ )
- dimensioni e forma della sezione ( $I_{\min}$ )
- lunghezza e condizioni di vincolo ( $\ell_0$ )

# Lunghezze efficaci (libere di inflessione)

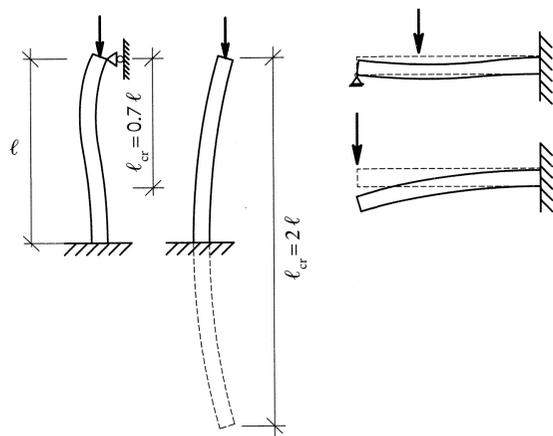
Cerniere nei due estremi	Incastri nei due estremi	Una cerniera ed un incastro	Un estremo libero ed un incastro
 <p>Lunghezza reale</p> <p>Lunghezza efficace <math>L_e = 1.0L</math></p> <p>Cerniera ↓</p> <p>Cerniera ↑</p>	 <p>Lunghezza reale</p> <p>Lunghezza efficace <math>L_e = 0.50L</math></p> <p>Incastro</p> <p>Incastro</p> <p>Punti di flesso</p>	 <p>Lunghezza reale</p> <p>Lunghezza efficace <math>L_e = 0.707L</math></p> <p>Cerniera ↓</p> <p>Incastro</p> <p>Punti di flesso</p>	 <p>Lunghezza reale</p> <p>Lunghezza efficace <math>L_e = 2.0L</math></p> <p>Libero</p> <p>Incastro</p>
$k = 1.0$	$k = 0.50$	$k = 0.7$	$k = 2.0$
$P = \pi^2 EI / L^2$	$P = \pi^2 EI / (\frac{1}{2}L)^2$ $= 4\pi^2 EI / L^2$	$P = \pi^2 EI / (0.7L)^2$ $= 2\pi^2 EI / L^2$	$P = \pi^2 EI / (2L)^2$ $= \frac{1}{4}\pi^2 EI / L^2$
<p>A</p>	<p>B</p>	<p>C</p>	<p>D</p>



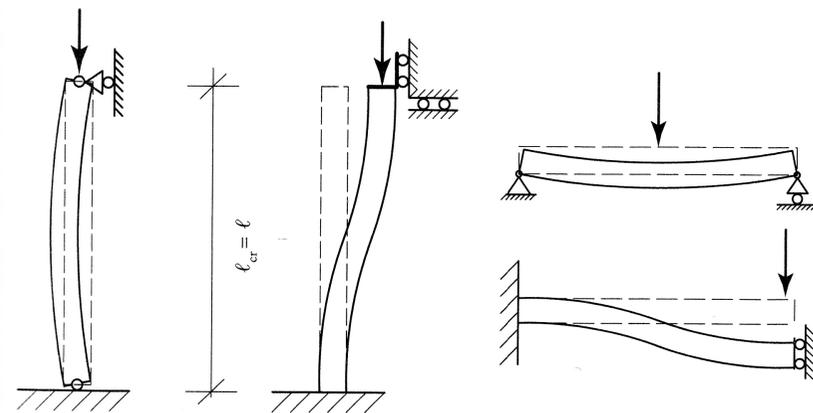
Confronto dei modi di sbandamento di una colonna libera di ruotare, una incastrata alla base e una lunga il 70%; analogia della trave con il confronto degli spostamenti (rigidezze)



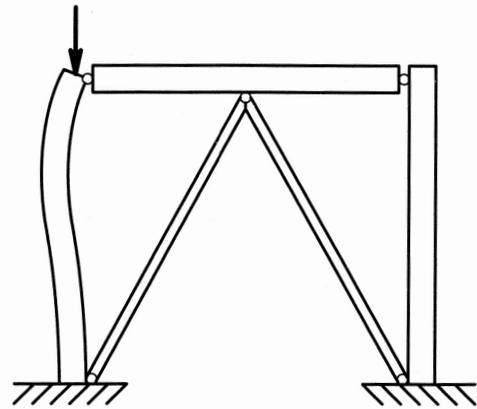
Confronto dei modi di sbandamento di una colonna libera di ruotare, una incastrata alle estremità e una lunga il 50%; analogia della trave con il confronto degli spostamenti (rigidezze)



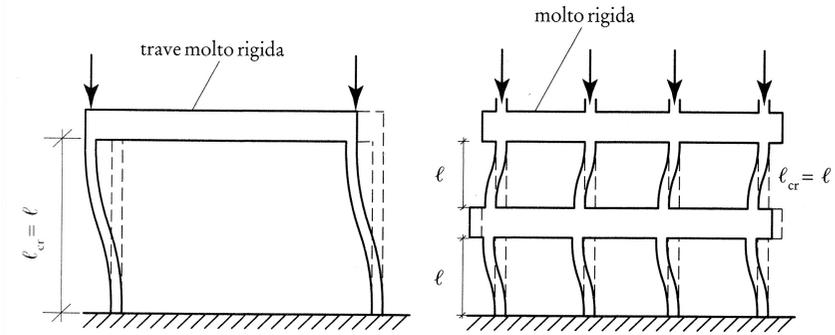
Confronto dei modi di sbandamento di una colonna libera di ruotare, ma trattenuta alle estremità, e una incastrata alla base e completamente libera in testa; analogia della trave con il confronto degli spostamenti (rigidezze)



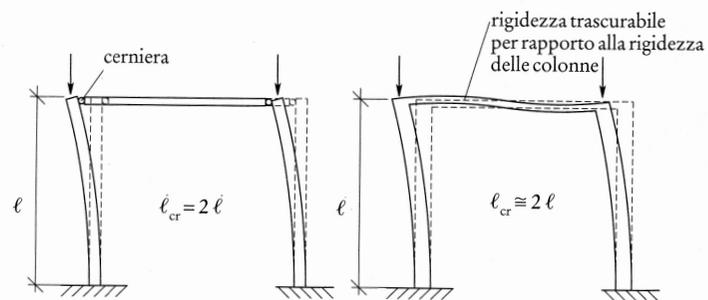
Confronto dei modi di sbandamento di una colonna libera di ruotare e una incastrata alle estremità, ma libera di spostarsi in senso orizzontale; analogia della trave con il confronto degli spostamenti (rigidezze)



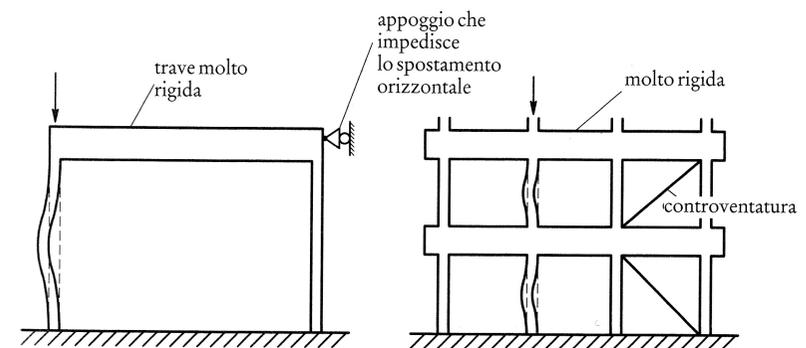
Esempio con una colonna incastrata alla base e libera di ruotare in testa



Esempi con colonne incastrate alle estremità, ma libere di spostarsi in senso orizzontale



Esempi con colonne incastrate alla base e completamente libere in testa



Esempi con colonne incastrate alle estremità



# Scelta della forma della sezione trasversale

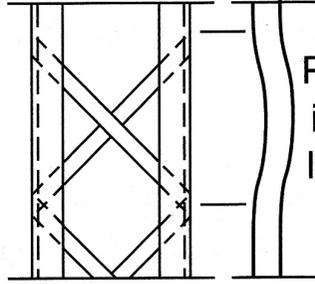
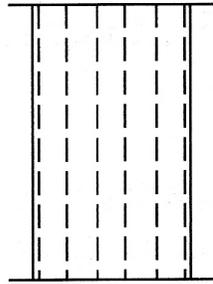
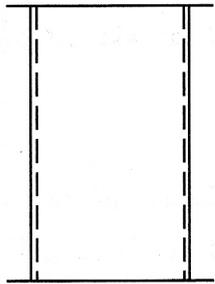
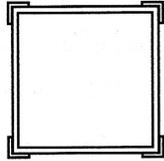
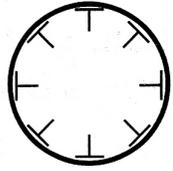
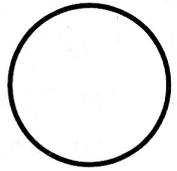
---

-  non utilizzabile
-  praticamente non utilizzabile
-  utilizzabile solo per colonne poco snelle
-  } utilizzabile solo per colonne poco sollecitate
-  soluzione efficace, connessioni facili
-  } soluzione strutturalmente molto efficace, connessioni delicate

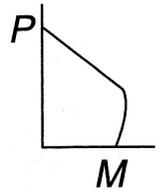
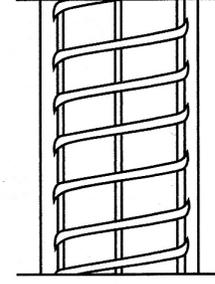
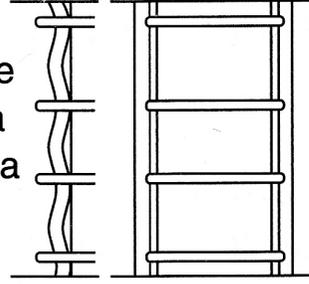
Scelta delle sezioni metalliche per gli elementi compressi

# Sezioni adeguate

Materiale spostato lontano dal baricentro per aumentare la resistenza all'instabilità



Potenziale instabilità localizzata

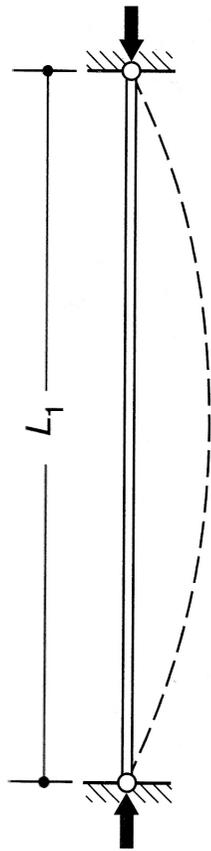


Tubo di acciaio    Tubo di acciaio irrigidito

Colonna con calastrelli

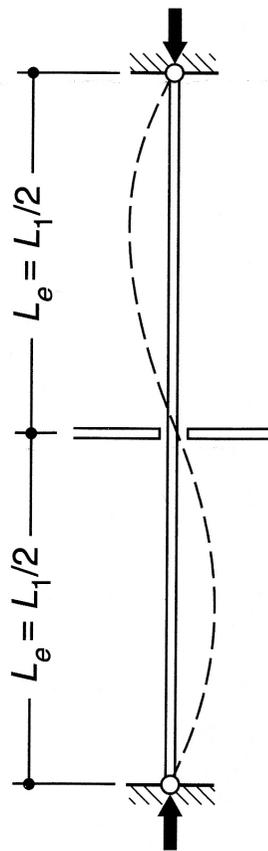
Colonna con staffe

Pilastro cerchiato



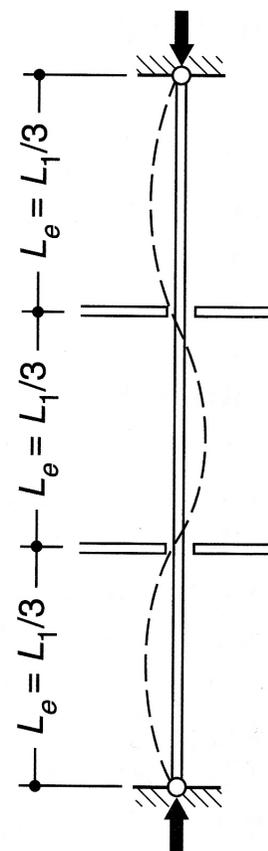
$$P_1 = \pi^2 EI / L_1^2$$

(a) Senza controventi.



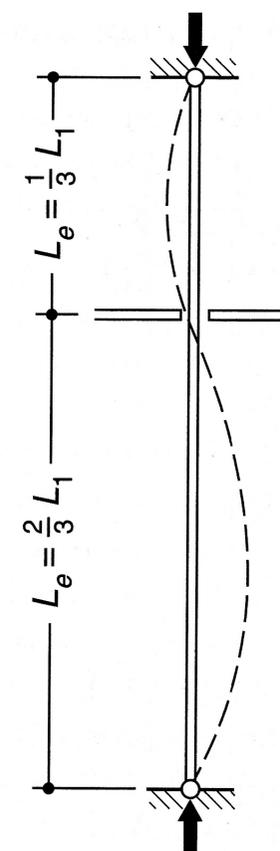
$$P_2 = \pi^2 EI / (L_1/2)^2 = 4P_1$$

(b) Controvento a metà altezza.



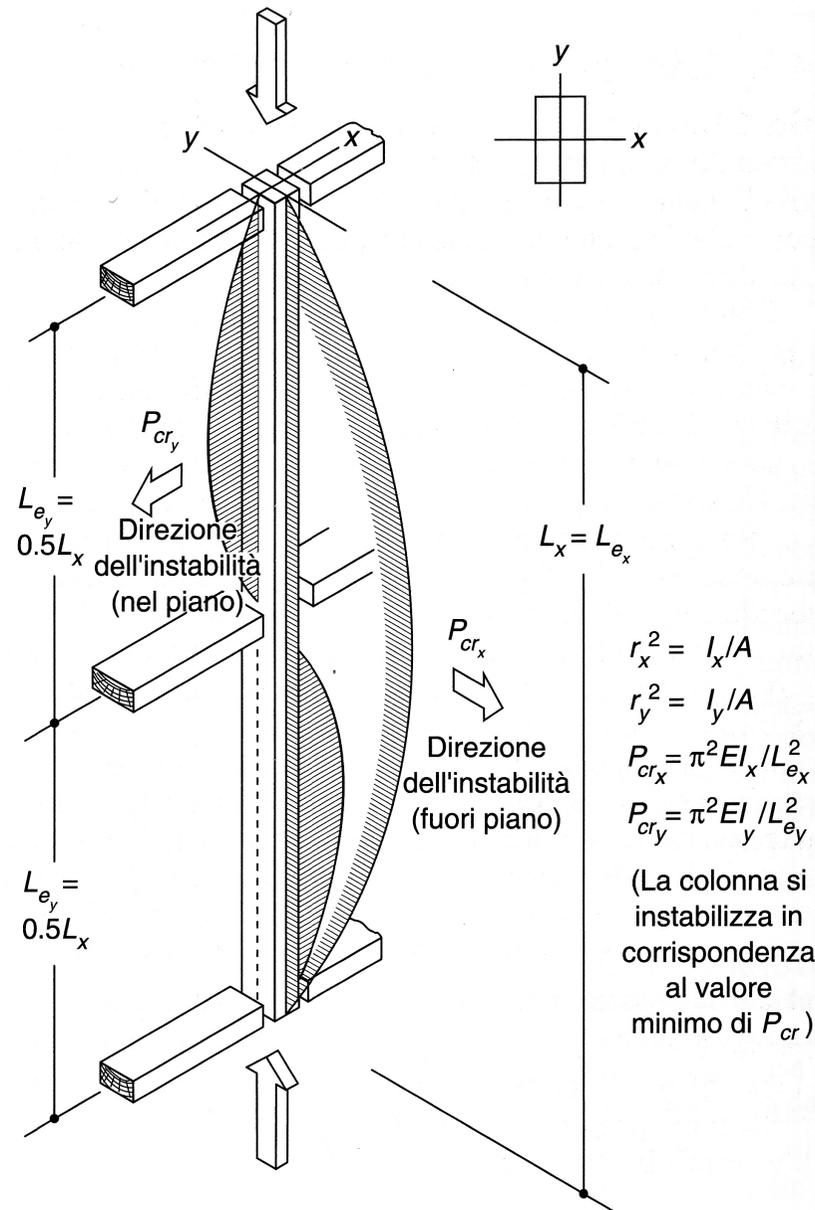
$$P_3 = \pi^2 EI / (L_1/3)^2 = 9P_1$$

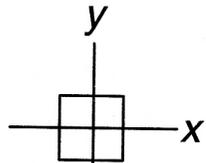
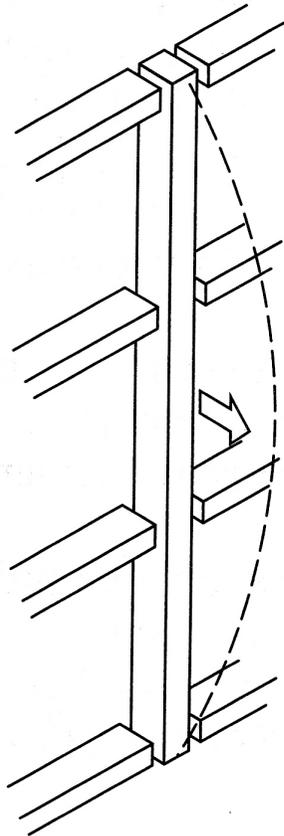
(c) Controventi posizionati a un terzo dell'altezza.



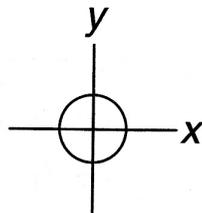
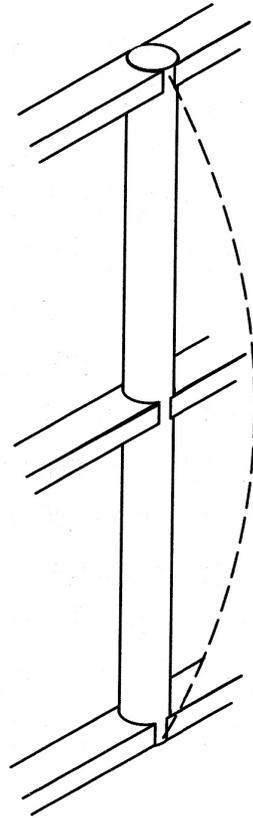
$$P_4 = \pi^2 EI / (\frac{2}{3} L_1)^2 = \frac{9}{4} P_1$$

(d) Controventi in posizione asimmetrica.

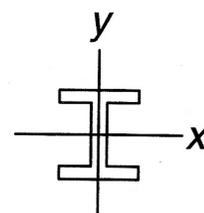
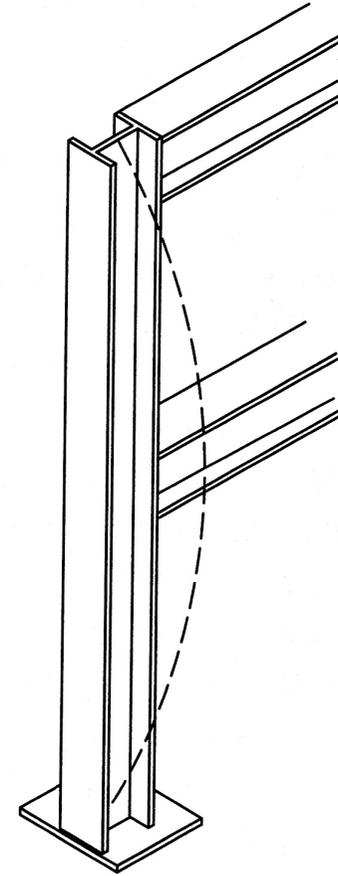




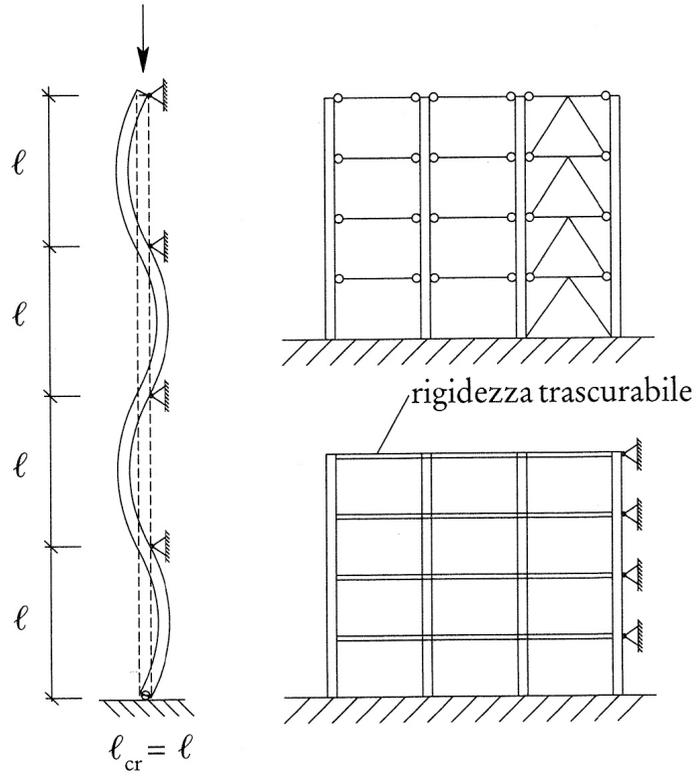
$$I_x = I_y$$



$$I_x = I_y$$



$$I_x = I_y$$



# Limiti di validità della Formula di Eulero

1/2

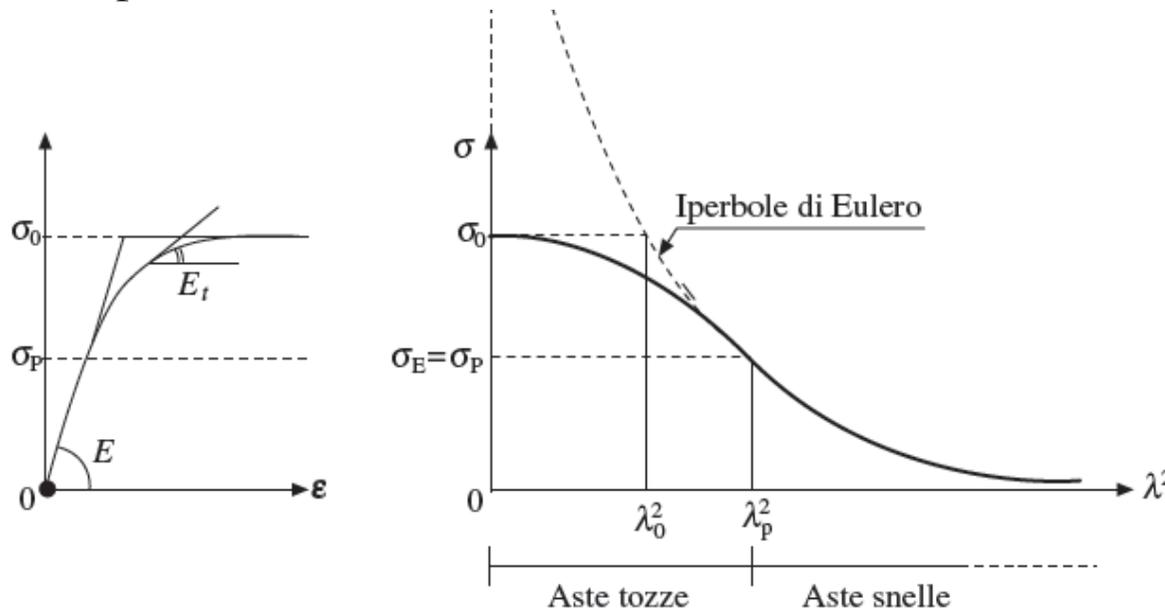
La formula di Eulero vale fino a quando il materiale rimane in campo elastico lineare, cioè quando risulta

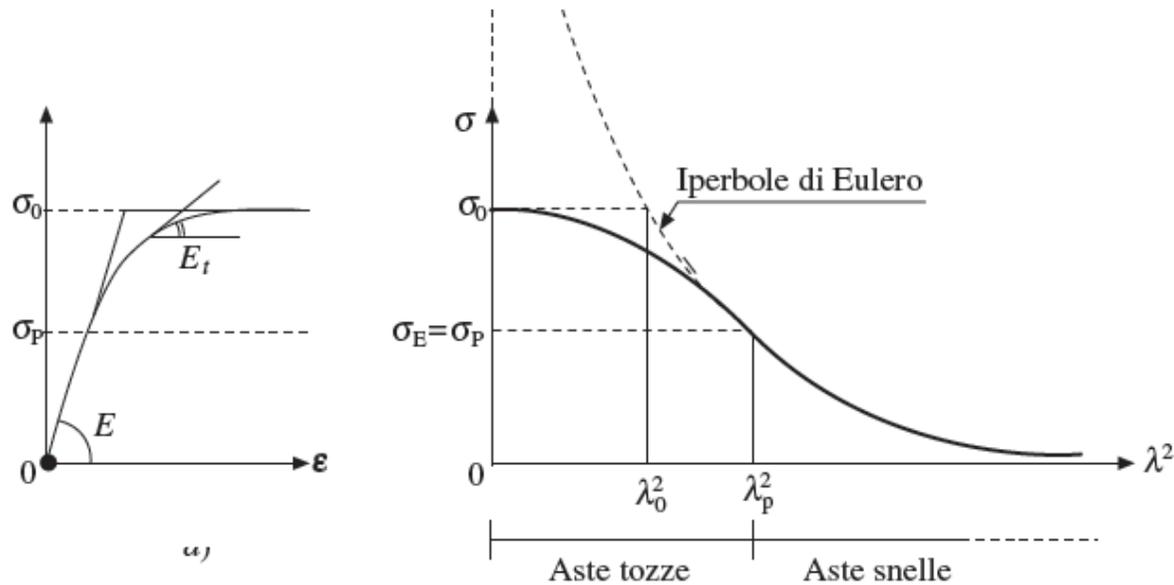
$$\sigma_E = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{A l_0^2} = \frac{\pi^2 E \rho_{\min}^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_P$$

dove è stata introdotta la **snellezza** dell'asta

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}}$$

Nel piano  $(\lambda^2, \sigma)$  la relazione precedente rappresenta l'iperbole equilatera di equazione  $\lambda^2 \sigma = \pi^2 E = \text{cost}$ , detta iperbole di Eulero.





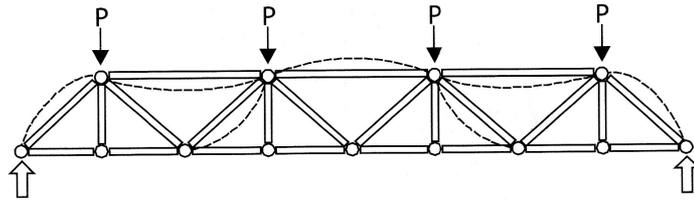
Il valore della **snellezza limite** o di **transizione**  $\lambda_P$ , per cui la tensione euleriana è pari a quella limite di proporzionalità,  $\sigma_E = \sigma_P$ , risulta

$$\lambda_P = \pi \sqrt{E / \sigma_P}$$

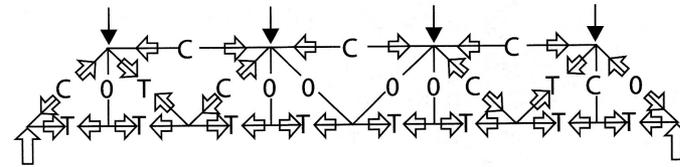
Per gli acciai da costruzione si ha

$$\lambda_P \approx 80 / 100$$

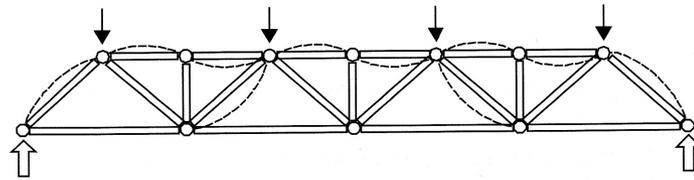
# Verifica di elementi tesi e compressi



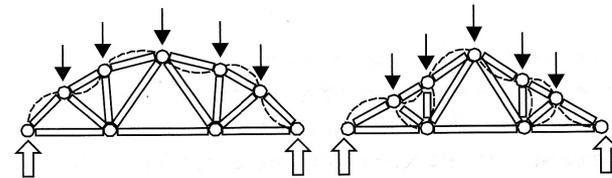
(a) Travatura con elementi della corda superiore molto lunghi.



(b) Distribuzione delle azioni per la travatura in (a).



(c) Travatura con elementi tesi più lunghi di quelli compressi.



(d) Travature con elementi tesi di lunghezza maggiore di quelli compressi.

## *Elementi tesi*

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{amm} = \frac{\sigma_p}{s}$$

## *Elementi compressi*

$$\sigma_c = \frac{\omega N}{A} \leq \sigma_{amm} = \frac{\sigma_p}{s}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{amm}}{\omega} = \frac{\sigma_p}{\omega s}$$

Millennium dome (Londra 1999)



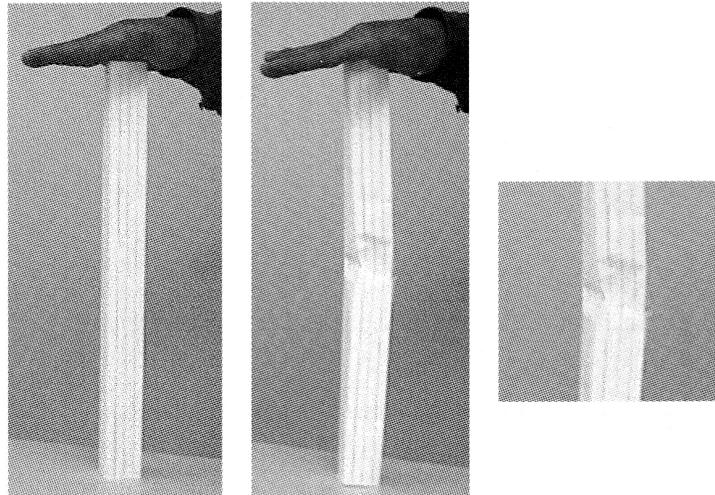
Bigo (Genova 1992)



Palazzetto dello sport (Roma 1957)



# Imbozzamento di elementi a parete sottile

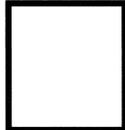


Imbozzamento di una colonna a pareti sottili

Pericolo di sbandamento



Sezione ideale



Pericolo di imbozzamento



Sezioni con il medesimo impiego di materiale

