MATEMATICA FINANZIARIA

Principali formule finanziarie e probabilistiche

REGIMI DI CAPITALIZZAZIONE E ATTUALIZZAZIONE

– Fattore di montante (t durata)
  regime a interessi semplici: $f(t) = 1 + it$
  regime a interessi composti
    con convenzione lineare: $f(t) = (1+i)^n \ (1+ip)$ $(t = n + p)$
    con convenzione esponenziale: $f(t) = (1+i)^t$
  regime a interessi anticipati: $f(t) = \frac{1}{1-dt}$ $(t < \frac{1}{d})$
  regime esponenziale (intensità costante): $f(t) = e^{\delta t}$
– Fattore di sconto (t durata)
  regime dello sconto razionale o semplice: $\phi(t) = \frac{1}{1+it}$
  regime dello sconto composto: $\phi(t) = (1+i)^{-t}$
  regime esponenziale (intensità costante): $f(t) = e^{-\delta\ t}$
– Tassi equivalenti
  tasso annuo e tasso periodale, regime composto, k periodi nell'anno: $i = (1+i_k)^k - 1$
  tasso convertibile: $j_k = k\ i_k$
  tasso d'interesse e tasso di sconto: $d = \frac{i}{1+i}$
  tasso e intensità istantanea d'interesse: $\delta = \ln(1+i)$

RENDITE

– Rendita posticipata, n rate unitarie
  valore attuale: $a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
  montante: $s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = a_{n\rceil i}\ (1+i)^n$
– Rendita anticipata, n rate unitarie
  valore attuale: $\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ (1+i) = a_{n\rceil i}\ (1+i)$
  montante: $\ddot{s}_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\ (1+i) = s_{n\rceil i}\ (1+i)^n$
– Reciproco di valore attuale
  rendita posticipata: $\alpha_{n\rceil i} = \frac{1}{a_{n\rceil i}}$
  rendita anticipata: $\ddot{\alpha}_{n\rceil i} = \frac{1}{\ddot{a}_{n\rceil i}}$
– Reciproco di montante
  rendita posticipata: $\sigma_{n\rceil i} = \frac{1}{s_{n\rceil i}}$
  rendita anticipata: $\ddot{\sigma}_{n\rceil i} = \frac{1}{\ddot{s}_{n\rceil i}}$

LEGGI FINANZIARIE A UNA VARIABILE

– Fattore montante: $f(t)$, t durata
– Fattore di sconto: $\phi(t) = \frac{1}{f(t)}$
– Tasso d'interesse: $i = f(1) - 1$
– Tasso di sconto: $d = 1 - \phi(1)$
– Montante di proseguimento: $F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$
– Intensità istantanea d'interesse: $\rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln\ f(t)$

LEGGI FINANZIARIE A DUE VARIABILI

– Fattore montante: $F(x, y)$, $x \leq y$ epoche
– Fattore di sconto: $\Phi(y, x) = \frac{1}{F(x,y)}$
– Tasso d'interesse: $i_x = F(x, x+1) - 1$
– Tasso di sconto: $d_x = 1 - \Phi(x+1, x)$
– Montante di proseguimento: $G(x, y, z) = \frac{F(x,z)}{F(x,y)}$
– Intensità istantanea d'interesse: $\rho(x, y) = \frac{F'_y(x,y)}{F(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y} \ln F(x, y)$

STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI all'epoca n

– Tassi a pronti (spot): $h^{(n)}(n, n+t)$
– Intensità istantanea d'interesse: $r^{(n)}(n, n+t) = \ln(1 + h^{(n)}(n, n+t))$
– Corso (prezzo) di ZCB unitari: $P^{(n)}(t) = (1 + h^{(n)}(n, n+t))^{-t}$
– Tassi impliciti (forward): $h^{(n)}(n+s, n+t) = \left(\frac{(1+h^{(n)}(n,n+t))^t}{(1+h^{(n)}(n,n+s))^s} \right)^{\frac{1}{t-s}} - 1$

AMMORTAMENTI (S importo prestito, C_t quota capitale, durata n)

– Condizione di chiusura
 elementare: $S = \sum_{t=1}^{n} C_t$
 iniziale: $S = \sum_{t=1}^{n} R_t \ (1+i)^{-t}$
 finale: $S \ (1+i)^n = \sum_{t=1}^{n} R_t \ (1+i)^{n-t}$
– Debito residuo: $D_t = \sum_{s=t+1}^{n} C_s = \sum_{s=t+1}^{n} R_s \ (1+i)^{-(s-t)}$
– Debito estinto: $E_t = S - D_t$
– Quota interessi: $I_t = D_{t-1} \ i$
– Rata: $R_t = C_t + I_t$
– Relazioni ricorrenti per il debito residuo: $D_{t+1} = D_t - C_{t+1}$; $D_{t+1} = D_t \ (1+i) - R_{t+1}$;
 nel caso di rate non equidistanti: $D_{s+1} = D_s \ (1+i)^{t_{s+1} - t_s} - R_{s+1}$
– Ammortamento italiano
 quota capitale: $C_t = C = \frac{S}{n}$
 debito residuo: $D_t = \frac{n-t}{n} C = \frac{t}{n} S$
 rata: $R_{t+1} = R_t - C \ i$
– Ammortamento francese (o progressivo)
 rata: $R = S \ \alpha_{n\rceil i}$
 quota capitale: $C_t = S \ \sigma_{n\rceil i} \ (1+i)^{t-1} = R \ (1+i)^{-(n-t+1)}$; $C_{t+1} = C_t \ (1+i)$
– Ammortamento americano (o a due tassi)
 rata: $R = S \ \sigma_{n\rceil i'} + S \ i$
– Ammortamento tedesco (o a interessi anticipati)
 quota interessi: $I_{t-1} = d \ D_{t-1}$
– Valutazione di prestiti
 valore all'epoca t al tasso i^*: $V_t = \sum_{s=t+1}^{n} R_s \ (1+i^*)^{-(s-t)}$
 usufrutto: $U_t = \sum_{s=t+1}^{n} I_s \ (1+i^*)^{-(s-t)}$
 nuda proprietà: $P_t = \sum_{s=t+1}^{n} C_s \ (1+i^*)^{-(s-t)}$

SCELTE FINANZIARIE
(flussi operazione a_s alle epoche t_s, flussi finanziamento f_s alle epoche t_s)

– Discounted Cash Flow (DCF): $G(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s \ (1+x)^{-t_s}$
– Valore Attuale Netto (VAN): DCF con tasso x assegnato
– Tasso Interno di Rendimento (TIR): tasso x^* (se esiste unico) tale che $G(x) = 0$

– Valore Attuale Netto Generalizzato (VANG): VAN a tasso variabile
– Adjusted Present Value (APV): $\Gamma(i) = \sum_{s=1}^{n}(a_s + f_s)\ (1+i)^{-t_s}$
– Generalized Adjusted Present Value (GAPV): APV a tasso variabile
– Scomposizione del VAN (flussi annuali, $\Phi(s,0)$ fattore di sconto)
outstanding capital: $w_s = w_{s-1}\ (1+x_s^*) - a_s$ (x_s^* tasso interno s-esimo anno)
contributo periodale al VAN: $g_s = [-w_{s-1}\ (1+i_s)+(a_s+w_s)]\ \Phi(s,0) = w_{s-1}(x_s^*-i_s)\ \Phi(s,0)$

DURATION (flussi a_s alle epoche t_s)

– Duration (durata media finanziaria): $D = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s\ a_s\ \phi(t_s)}{\sum_{s=1}^{n} a_s\ \phi(t_s)}$
– Convexity: $C = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s\ (t_s+1) a_s\ \phi(t_s)}{\sum_{s=1}^{n} a_s\ \phi(t_s)}$
– Tasso di variazione del prezzo
approssimazione di primo ordine: $\frac{\Delta P}{P} \simeq -\frac{D}{(1+i)}\Delta i$
approssimazione di secondo ordine: $\frac{\Delta P}{P} \simeq -\frac{D}{(1+i)}\Delta i + \frac{C}{(1+i)^2}\frac{(\Delta i)^2}{2}$

LEASING
(A valore di fornitura, B anticipo, C_s canoni epoche t_s, E prezzo riscatto, T scadenza)

– Condizione di bilancio (equità): $A = B + \sum_{s=n+1}^{N} C_s + \sum_{s=1}^{n} C_s\ (1+i)^{-t_s} + E\ (1+i)^{-T}$
– TAEG: TIR dell'operazione, tenendo conto di tutti gli oneri accessori

TITOLI A REDDITO FISSO

– BOT e ZCB (T scadenza, t epoca di valutazione, S valore nominale, P_t prezzo all'epoca t)
rendimento a scadenza: tasso i_t t.c. $S = P_t(1 + i_t(T-t))$
rendimento in (t,z): tasso $r_{t,z}$ t.c. $P_z = P_t(1 + r_{t,z}(z-t))$
– BTP e obbligazioni (cedola c, valore nominale C)
corso tel quel, C^T: corso secco + rateo interessi
rendimento a scadenza: tasso x t.c. corso tel quel = valore attuale flussi futuri
rendimento immediato
nel caso di cedola annua: $r = \frac{c}{C^T}$
nel caso di cedola semestrale: $r = (1 + \frac{c}{C^T})^2 - 1$

ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

– Indicatore di evento: $|E| = \begin{cases} 1 & \text{se } E \\ 0 & \text{se } E^c \end{cases}$

– Teorema probabilità totali: dati n eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ incompatibili

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$

– Teorema probabilità composte: $P(E \cap H) = P(E)\ P(H|E)$

segue in particolare: $P(H) = P(E)\ P(H|E) + P(E^c)\ P(H|E^c)$

– Condizione di indipendenza stocastica tra eventi: $P(E \cap H) = P(E)\ P(H)$

– Variabili aleatorie discrete

descrizione: $X = x_1\ |E_1| + x_2\ |E_2| + \ldots$ oppure $X = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ \ldots & \ldots \end{cases}$

funzione di ripartizione: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{h: x_h \leq x} p_h$

valore atteso (previsione): $P(X) (= E(X)) = \sum_h x_h\ p_h$; $P(aX + b) = aP(X) + b$

varianza: $var(X) = P((X - P(X))^2) = P(X^2) - (P(X))^2$; $var(aX + b) = a^2\ var(X)$

scarto quadratico medio: $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$

– Variabili aleatorie doppie

probabilità congiunta: $p_{hk} = P(X = x_h, Y = y_k)$

probabilità marginali: $p'_h = \sum_k p_{hk} = P(X = x_h)$; $p''_k = \sum_h p_{hk} = P(Y = y_k)$

condizione di indipendenza stocastica: $p_{hk} = p'_h\ p''_k$ oppure $P(XY) = P(X)\ P(Y)$

covarianza: $cov(X,Y) = P((X - P(X))\ (Y - P(Y))) = P(XY) - P(X)\ P(Y)$

($cov(X,Y) = 0$ in caso di indip. stoc.)

variabile somma

previsione: $P(X + Y) = P(X) + P(Y)$

varianza: $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2\ cov(X,Y)$

nel caso di v.a. indipendenti: $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$

nel caso di n v.a. indipendenti: $var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n var(X_i)$