Statistica
A.A. 2019/2020
CdL Scienze Economiche

Prof. Massimiliano Ferrara
Dott. Bruno Antonio Pansera

Lezione n.4

Calcolo delle Probabilità

Calcolo delle Probabilità: Introduzione

- Il concetto di probabilità è ben radicato nel senso e nel linguaggio comune. Esso esprime forme incerte di conoscenza che riguardano la maggior parte degli eventi della nostra vita (”probabilis” vs ”probatus”).
- Incertezza significa difetto e non totale assenza di certezza e quindi induce sempre in noi, più o meno consapevolmente, l’attribuzione di ”un grado di fiducia” al verificarsi di un evento.
- La probabilità, dunque, fa parte del patrimonio culturale di tutti, e non solo `dei matematici.

Calcolo delle Probabilità: Note Storiche

Le origini del **Calcolo delle Probabilità** tradizionalmente risalgono alla corrispondenza tra **Pascal** e **Fermat** su un problema di gioco d'azzardo (1654): un noto giocatore dell'epoca riscontrava che le sue deduzioni probabilistiche non si accordavano con le sue fortune, o meglio sfortune, di gioco e si rivolse a Pascal chiedendo lumi al riguardo.

- G. Cardano: "De ludo aleae" (1525, pubblicato nel 1663)
- G. Galilei: "Sopra le scoperte dei dadi" (1630)

Nato come *teoria matematica dei giochi*, il Calcolo delle Probabilità crebbe progressivamente di importanza tanto che già **Laplace**, agli inizi del XIX secolo, poteva affermare "*è notevole il fatto che una scienza, iniziata con l'analisi dei giochi d'azzardo dovesse essere elevata al rango dei più importanti oggetti della conoscenza umana*". La teoria conobbe un grande sviluppo nel XX secolo, quando **Kolmogorov** nel 1933 introdusse l'approccio assiomatico.

Calcolo delle Probabilità: Note Storiche

- J. Bernoulli: ”Ars conjectandi” (1713)
- P.S. Laplace: ”Theorie analytique des probabilites” (1812)
- J.C. Maxwell: la probabilità comincia ad entrare nel campo scientifico trovando applicazioni in fisica (metà del XIX secolo)
- B. De Finetti: definizione soggettiva di probabilità (1931)
- A. Kolmogorov: ”Foundation of the theory of probability” (1933)

Logica degli Eventi

Oggetto della teoria matematica sviluppata nel Calcolo delle Probabilità è un generico **esperimento casuale**, la cui singola esecuzione è chiamata **prova dell'esperimento**.

L'insieme di tutti i possibili esiti costituisce lo **spazio campione** associato all'esperimento casuale. Un evento A relativo al medesimo esperimento è un certo insieme di risultati, ovvero un sottoinsieme dello spazio campione.

Se l'insieme A è costituito da un solo elemento, allora quest'ultimo prende il nome di **evento elementare**; altrimenti A è un **evento composto**.

Teoria degli Insiemi

Un insieme S è una collezione di oggetti chiamati elementi dell'insieme.

- Se x è un elemento di S, allora $x \in S$;
- Se invece x non lo è, allora $x \notin S$;
- Se S non ha elementi, allora $S = \emptyset$.

Teoria degli Insiemi

- Se S contiene un numero finito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

  Come un lancio di una moneta non truccata
  $S = \{T, C\}$ T testa e C croce.
- Se invece S contiene un numero infinito di elementi

$$S = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

  ed è numerabile se gli elementi sono in relazione biunivoca con i numeri naturali.
- Si può considerare un insieme S i cui elementi x sono caratterizzati da una certa proprietà P

$$\{x \mid x \text{ che soddisfa } P\}$$

  dove $\mid$ significa tale che.

Teoria degli Insiemi

Se S è l'insieme di tutti gli scalari $x \in [0,1]$, può essere scritto

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

Si noti che è un intervallo continuo, è non numerabile: gli elementi di S non hanno corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

- Se ogni $x \in S$ e contenuto in T, allora S è sottoinsieme di T ed è scritto $S \subset T$.
- Se $S \subset T$ e $T \subset S$ allora $S = T$.
- Definiamo Ω come l'insieme universale, cioè contenente tutti gli elementi che possono essere di interesse in uno specifico contesto. Considereremo soltanto gli insiemi S tali che $S \subset \Omega$.

Teoria degli Insiemi

- Il complemento di S rispetto a Ω è l'insieme

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$$

  ed è denotato come S^c. Il complemento di Ω è $\Omega^c = \emptyset$.
- L'unione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **o** T e si indica con $S \cup T$
- L'intersezione di due insiemi S,T è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad S **e** T e si indica con $S \cap T$
- Due insiemi sono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$
- Una collezione di insiemi si dice partizione di S, se gli insiemi della collezione sono disgiunti e la loro unione è S.

Teoria degli Insiemi

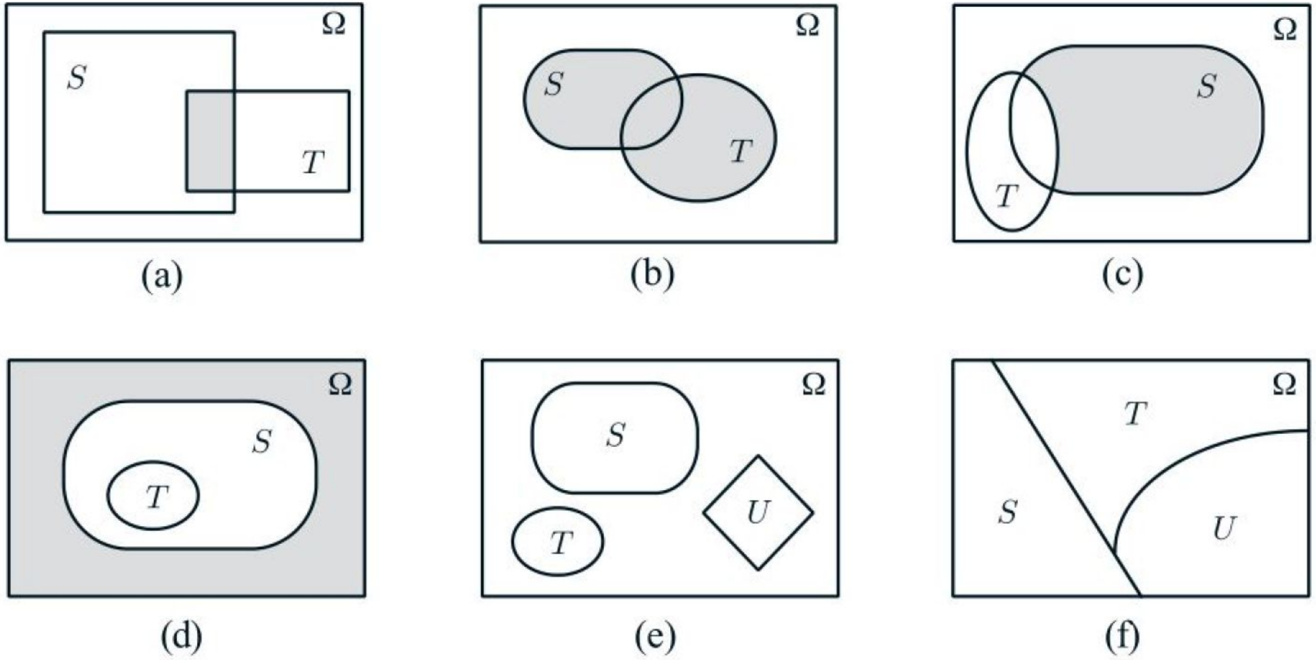


Figure 1.1: Examples of Venn diagrams. (a) The shaded region is $S \cap T$. (b) The shaded region is $S \cup T$. (c) The shaded region is $S \cap T^c$. (d) Here, $T \subset S$. The shaded region is the complement of S. (e) The sets S, T, and U are disjoint. (f) The sets S, T, and U form a partition of the set Ω.

Teoria degli Insiemi

Di conseguenza, le operazioni sugli insiemi hanno delle proprietà

$$
\begin{aligned}
S \cup T &= T \cup S, & S \cup (T \cup U) &= (S \cup T) \cup U,\\
S \cap (T \cup U) &= (S \cap T) \cup (S \cap U), & S \cup (T \cap U) &= (S \cup T) \cap (S \cup U),\\
(S^c)^c &= S, & S \cap S^c &= \emptyset,\\
S \cup \Omega &= \Omega, & S \cap \Omega &= S.
\end{aligned}
$$

Due particolari proprietà sono le *leggi di De Morgan*

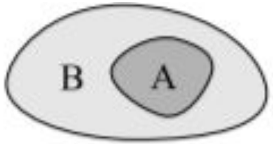
$$
\left(\bigcup_n S_n\right)^c = \bigcap_n S_n^c, \qquad \left(\bigcap_n S_n\right)^c = \bigcup_n S_n^c.
$$

Teoria degli Insiemi

- Dati due eventi $A, B \subseteq \Omega$, si dice che A *implica* B se è $A \subset B$.
- I due eventi sono *incompatibili* se non esiste alcun risultato ω che realizzi sia A che B, ovvero se è $A \cap B = \oslash$, dove $\oslash$ è l'insieme vuoto.
- Al contrario, se A e B *non* sono incompatibili, l'insieme non vuoto $(A \cap B)$ è costituito da tutti i risultati ω che realizzano *sia* A *che* B.
- L'insieme $(A \cup B)$ indica invece la *realizzazione dell'evento* A*, oppure dell'evento* B*, oppure di entrambi.*
- Se non si realizza un evento A, allora si realizza il suo complementare in $\overline{A} = \Omega \setminus A$ in Ω, *negazione* dell'evento A. Ne segue subito che Ω è l'*evento certo* e $\oslash$ è l'*evento impossibile*.

Teoria degli Insiemi

$A \subset B$

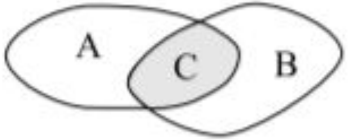


A implica B

$A \cap B = \emptyset$

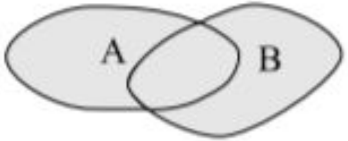
A e B sono incompatibili

$A \cap B = C \neq \emptyset$



si realizzano sia A che B

$A \cup B$



si realizza A, oppure B,
oppure entrambi

$\bar{A} = \Omega \setminus A$

non si realizza A

La costruzione di un Modello Probabilistico

Possiamo definire il Calcolo delle Probabilità come la teoria matematica dell'incertezza.

La teoria dice come si devono formulare in maniera corretta delle *valutazioni probabilistiche* o, in altri termini, come si deve formulare un *modello probabilistico*.

Come ogni modello matematico, anche quello probabilistico, da un lato, consente la trattazione di un problema di interesse in modo *logico* e *rigoroso*; dall'altro, rappresenta necessariamente *un'astrazione della realtà* e ne cattura solo alcuni aspetti. Inoltre, il modello deve condurre a risultati "utili", che siano in accordo con l'evidenza sperimentale. Altrimenti se ne impone la revisione.

La costruzione di un Modello Probabilistico

Occorre innanzitutto individuare quali sono gli ***eventi*** in gioco, cioè le diverse situazioni che si possono presentare quando si considera un certo fenomeno, in particolare gli *eventi elementari* o *esiti*.

Consideriamo il lancio simultaneo di due dadi di diverso colore: gli esiti, o eventi elementari, possono essere individuati dalle coppie ordinate di interi da 1 a 6. A partire dagli eventi elementari si possono costruire eventi "complessi", quali l'evento "uscita di un 7 (come somma)", che possiamo descrivere come la *collezione di esiti*:

$$E=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

L'insieme dei possibili esiti, nel nostro esempio le 36 coppie ordinate di interi da 1 a 6, è detto *spazio campionario* (S).

La costruzione di un Modello Probabilistico

I due ingredienti principali sono:

- Lo **spazio campionario** Ω che è l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento;
- la **legge di probabilità** che assegna ad un insieme A di possibili risultati (chiamati **eventi**), un numero non negativo $P(A)$ (la **probabilità** di A).

La costruzione di un Modello Probabilistico

In particolare:

- Si definisca **esperimento aleatorio**, un processo le cui possibili realizzazioni sono due o più risultati di cui non si può prevedere con certezza quale si realizzerà;
- un **evento** si verifica quando il risultato dell'esperimento aleatorio è uno degli eventi che lo costituiscono.

La costruzione di un Modello Probabilistico

Come abbiamo già ricordato, il modello probabilistico è un'astrazione della realtà che ne cattura alcuni aspetti. Non sorprenderà quindi l'osservazione che lo **spazio campionario** è una costruzione matematica *non* necessariamente *unica*, che dipende da ciò che pensiamo sia importante.

È evidente che possiamo descrivere gli "oggetti" sopra introdotti in termini *insiemistici*: lo *spazio campionario* può essere visto come un insieme del quale gli esiti costituiscono gli elementi o "punti". Gli *eventi* sono allora sottoinsiemi dell'insieme S.

La costruzione di un Modello Probabilistico

Il fatto che certi eventi siano aleatori ha portato l'uomo a formulare scommesse sul loro accadere. Il concetto di probabilità è nato proprio per effetto dei giochi d'azzardo!

Consideriamo il seguente gioco. Hai di fronte due mazzi di carte, A e B, così composti: A contiene 10 carte con figure e 3 carte senza figure; B è formato da 12 carte con figure e 6 senza figure. Devi scegliere una carta da uno dei due mazzi: vinci se scegli una figura. Da quale mazzo conviene scegliere la carta?

La costruzione di un Modello Probabilistico

Se le carte non sono truccate, le estrazioni di una carta dai due mazzi sono tutte **ugualmente possibili**, poiché le carte sono coperte e non possiamo distinguerle l'una dall'altra.
Chiamiamo **casi possibili** tutti i risultati che possono verificarsi. Per il mazzo *A* i casi possibili sono 13, mentre per il mazzo *B* sono 18.
Chiamiamo **casi favorevoli** quelli in cui si verifica l'evento che fa vincere.
Poiché per vincere bisogna estrarre una figura, i casi favorevoli sono tanti quante le carte con figure: 10 per il mazzo *A* e 12 per il mazzo *B*.

Probabilità: Definizioni

- Classica (**P.S. Laplace**)
- Frequentista (**R. von Mises**)
- Soggettivista (**B. De Finetti**)
- Assiomatica (**A. Kolmogorov**)

Modelli Probabilistici: Classico

Consideriamo il rapporto fra i casi favorevoli e quelli possibili:

$$\text{mazzo } A: \frac{10}{13}; \qquad \text{mazzo } B: \frac{12}{18}.$$

Poiché $\frac{10}{13}$ è maggiore di $\frac{12}{18}$, conviene scegliere il mazzo A!

Il quoziente $\dfrac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}}$ fornisce una stima sulla possibilità che si verifichi un determinato evento e viene chiamato **probabilità** di quell'evento.

Modelli Probabilistici: Classico

Probabilità

La probabilità di un evento è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli *f* e quello dei casi possibili *u*, quando essi sono tutti ugualmente possibili.

probabilità di E

numero dei casi favorevoli

$$p\,(E) = \frac{f}{u}$$

numero dei casi possibili

Modelli Probabilistici: Classico

ESEMPIO Nel lancio di un dado a sei facce consideriamo i seguenti eventi:

$E_1 =$ «esce il 4»; $E_2 =$ «esce un numero dispari»;

$E_3 =$ «esce un numero maggiore di 2».

Calcoliamo la probabilità di ciascun evento nell'ipotesi che il dado non sia truccato:

$$p(E_1) = \frac{1}{6} \text{ (casi possibili 6, casi favorevoli 1);}$$

$$p(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (casi favorevoli: numeri 1, 3, 5);}$$

$$p(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (casi favorevoli: numeri 3, 4, 5, 6).}$$

Modelli Probabilistici: Classico

Abbiamo detto che u rappresenta il numero dei casi possibili e f il numero dei casi favorevoli.

- Se un evento è impossibile, il numero dei casi favorevoli è 0; quindi

  $$p = \frac{f}{u} = \frac{0}{u} = 0.$$

  Pertanto **la probabilità di un evento impossibile è 0**.

- Se un evento è certo, il numero dei casi favorevoli è uguale a quello dei casi possibili; quindi

  $$p = \frac{f}{u} = \frac{u}{u} = 1.$$

Modelli Probabilistici: Classico

La probabilità di un evento certo è 1.

- Per gli eventi aleatori, il numero f dei casi favorevoli è compreso fra 0 e u: $0 < f < u$. Dividendo tutti i termini della doppia disuguaglianza per u, si ottiene:

$$\frac{0}{u} < \frac{f}{u} < \frac{u}{u}, \qquad \text{ossia} \qquad 0 < p < 1.$$

Pertanto **la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso fra 0 e 1.**

In generale, considerando assieme i tre casi, possiamo dire che la probabilità di un evento è compresa fra 0 e 1, estremi inclusi: $\mathbf{0 \leq p \leq 1}$.

Modelli Probabilistici: Classico

Dato un evento E, il suo **evento contrario** è quell'evento che si verifica quando e solo quando non si verifica E, e lo indichiamo con il simbolo $\overline{E}$.

ESEMPIO

Nel lancio di un dado, l'evento contrario dell'uscita di un numero pari è l'uscita di un numero dispari.

TEOREMA

La somma della probabilità di un evento e di quella del suo evento contrario è 1:

$$p(E) + p(\overline{E}) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE

Se f è il numero di casi favorevoli dell'evento E e u il numero dei casi possibili, il numero dei casi favorevoli dell'evento contrario è $u - f$, quindi:

$$p(E) + p(\overline{E}) = \frac{f}{u} + \frac{u-f}{u} = \frac{f+u-f}{u} = \frac{u}{u} = 1.$$

La costruzione di un Modello Probabilistico

- Due elementi dello stesso spazio campionario devono essere distinti e **mutualmente esclusivi**: l'esperimento dà un solo risultato.
- L'insieme campionario scelto per un modello probabilistico deve essere **collettivamente esaustivo**: qualsiasi cosa accada nell'esperimento, si otterrà sempre un risultato incluso in Ω.

Modelli Probabilistici: Frequentista

La probabilità è il limite della proporzione di volte in cui l'evento A si verifica in un numero molto elevato n di ripetizioni di un esperimento aleatorio

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

dove $n(A)$ è il numero di successi nei primi n esperimenti ed $n(A)/n$ la frequenza relativa dell'evento A.

Modelli Probabilistici: Soggettivo

La probabilità esprime il livello individuale di fiducia del verificarsi di un certo evento. Quindi, decision-makers con una differente informazione e/o gusti, possono valutare l'accadimento di un evento con differenti probabilità

La Probabilità di un evento A va vista come il grado di fiducia che ciascuno attribuisce, sulla base dello stato della informazione, al verificarsi dell'evento.

Modelli Probabilistici: Soggettivo

Come si fa valutare ad un soggetto la sua probabilità soggettiva dell'evento A?
Basta proporgli una scommessa: Vincerà S euro se l'evento si verificherà, nulla altrimenti.
Quale prezzo p_A si ritiene equo pagare per tale scommessa?

$$P(A) = \frac{p_A}{S}$$

Modelli Probabilistici: Soggettivo

Problema: p_A può non riflettere verità.
Soluzione: Il decision-maker dichiara il prezzo equo **prima** che lui sappia di essere lo scommettitore o il banco.

Principio di coerenza

Chi valuta la probabilità non lo farà mai in modo da essere costretto ad accettare un sistema di scommesse in cui sia posto sicuramente in perdita.

Modelli Probabilistici: Assiomatico

L’approccio assiomatico di Kolmogorov, può essere visto come una codificazione delle regole computazionali che sono *indipendenti* dal significato preciso che si attribuisce alla probabilità

Modelli Probabilistici: Assiomatico

Gli eventi A_i , $i = 1, 2, . . .$ relativi ad un determinato esperimento casuale sono sottoinsiemi dello spazio campione Ω, sui quali effettuiamo operazioni di unione, intersezione, differenza.

Al fine di attribuire a ciascun evento una misura di probabilità, si richiede a tali eventi di soddisfare il seguente requisito fondamentale: *qualunque operazione su di essi deve essere a sua volta un evento definito in* Ω.

Questa proprietà si formalizza dicendo che gli eventi devono costituire un campo C, ovvero una classe additiva di insiemi A_i , non vuota e chiusa rispetto alla negazione e all'unione. Se esiste un insieme numerabile di infiniti eventi A_i, questi devono formare un **campo di Borel** (o **σ-algebra**).

Modelli Probabilistici: Assiomatico

Definizione 1: Un campo di Borel B è la classe costituita da una infinità numerabile di insiemi $A_i \in \boldsymbol{\Omega}$,, tale che:

1) $A_i \in \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A}_i = \Omega \backslash A_i \in \mathcal{B}$
2) $A_i \in \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}; \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$
3) $\oslash \in \mathcal{B}; \quad \Omega \in \mathcal{B}.$ ■

DEFINIZIONE 2. *La probabilità è un funzionale* $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$ *che verifica i seguenti assiomi:*

I. $P(\Omega) = 1$

II. $i \neq j, \quad A_i \cap Aj = \oslash \quad \Longleftrightarrow \quad P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j).$ ■

Modelli Probabilistici: Assiomatico

La formulazione matematica del modello probabilistico è così completa: essa consiste nell'insieme ($\boldsymbol{\Omega}$, B, P) chiamato **spazio di probabilità**, e permette di assegnare un numero reale non negativo $P(A_i)$ che chiamiamo **probabilità di A_i**, agli eventi che formano un campo di Borel B, costituito da sottoinsiemi di uno spazio campione associato all'esperimento casuale.

Consideriamo come singola *prova* di un esperimento casuale il classico esempio del lancio di un dado, che ha come risultati (eventi) possibili ω l'uscita di un numero intero, compreso tra 1 e 6. Lo spazio campione è $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ovvero è costituito da un numero finito di elementi ω, cui si attribuisce il significato di *eventi elementari*. Essi formano un insieme di eventi necessari e a due a due incompatibili, poiché $\{i\} \cap \{j\} = \oslash$ per ogni $i \neq j = 1,..,6$. Ma esistono molti altri eventi in questo esperimento casuale: ad esempio, l'uscita di un numero pari, che è costituita dall'evento $E = \{2,4,6\}$ composto dai tre eventi elementari che lo realizzano; oppure l'uscita di un numero "basso" definita dall'evento $E' = \{1,2\}$; ecc. Inoltre: l'intersezione $\{2,4,6\} \cap \{1,2\}$, che coincide con l'evento elementare $\{2\}$, indica l'evento: "uscita di un numero pari *e* basso". L'evento: $\{1,3,5\} \cup \{5,6\}$ indica l'uscita di un numero dispari, *oppure* di un numero maggiore di 4, *oppure* di un numero dispari *e* maggiore di 4" (ovvero dell'intersezione dei due eventi, costituita dall'evento elementare $\{5\}$). Il complementare dell'insieme $A = \{1,2,3,5\}$ composto dai numeri primi minori di 7, ovvero l'evento $\Omega \backslash A = \{4,6\}$, indica l'uscita di un numero che *non* sia primo (*negazione* di A).

Tutti i possibili eventi si presentano in questo esperimento come sottoinsiemi di Ω , ed è facile verificare che il loro numero complessivo è la somma delle combinazioni di classe k di sei elementi:

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 2^6 = 64,$$

compresi l'insieme vuoto (per $k = 0$) e l'insieme Ω (per $k = 6$). Essi costituiscono un *campo* $\mathcal{C}$, perchè soddisfano tutte le condizioni di additività sopra precisate.

Modelli Probabilistici: Assiomatico

Sia Ω uno spazio campionario finito e A un suo evento. La probabilità dell'evento A è così un numero reale che segue tre assiomi:

- *Assioma 1*: $P(A) \geqslant 0$;
- *Assioma 2*: $P(\Omega) = 1$ (normalizzazione);
- *Assioma 3*: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.

Modelli Probabilistici: Assiomatico

L'assioma I attribuisce probabilità 1 all'evento certo Ω, senza tuttavia escludere a priori che esistano altri eventi, diversi da Ω, con probabilità 1. Se è teoricamente possibile un evento $A \neq \Omega$ tale che $P(A) = 1$, si dice che questo evento è *quasi certo*.

L'assioma II esprime la *proprietà additiva* del funzionale P tra due eventi fra loro incompatibili. Tale proprietà si generalizza subito a un insieme finito o infinito di eventi a due a due incompatibili, con una delle due relazioni seguenti:

$$II') \qquad i \neq j,\ A_i \cap A_j = \oslash \quad \Longleftrightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$rII") \qquad i \neq j,\ A_i \cap A_j = \oslash \quad \Longleftrightarrow \quad P\left(\bigcup^{\infty} n_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

l'ultima delle quali esprime la *additività infinita*, o σ-*additività*, dell'insieme $\{A_i, i = 1, 2, \ldots\}$ di eventi a due a due incompatibili.

Modelli Probabilistici: Assiomatico

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
2. $P(\emptyset) = 0$;
3. $P(A) \leqslant P(B)$ se $A \subset B$;
4. $P(A) \leqslant 1$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
6. Se gli eventi sono tutti disgiunti $\Omega(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$, allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Esempi

Esempio 1.3: eventi elementari equiprobabili

Si è visto (Esempio 1.1) che nel lancio di un dado sei eventi elementari, a due a due incompatibili, costituiscono lo spazio campione $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Per gli assiomi I e II' si ha subito: $P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{6\}) = \sum_i P\{i\} = 1$ e se ammettiamo che ciascun evento elementare abbia uguale probabilità di realizzarsi (ovvero se operiamo con un *dado "non truccato"*), la probabilità di ciascuno vale:

$$\forall i = 1,..,6 : P(i) = 1/6.$$

Sempre per l'assioma II', l'evento composto: "esce un numero pari" ha probabilità

$$P(2,4,6) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/2$$

mentre l'uscita di un "numero che non sia primo" ha probabilità

$$P(4,6) = P(4) + P(6) = 2/6 = 1/3.$$

Se si effettua per due volte il lancio dello stesso dado non truccato, gli eventi elementari sono $6^2 = 36$, e la probabilità che esca due volte lo stesso numero vale

$$P(11,22,33,44,55,66) = \sum_i P(ii) = 6/36 = 1/6. \quad \triangleleft$$

Esempi

ESEMPIO 1.4

Nel lancio di una moneta, i possibili eventi elementari sono soltanto due: $T = \{$esce "testa"$\}$ e $C = \{$esce "croce"$\}$. Lo spazio campione associato ad una singola prova è $\Omega = \{TC\}$; se la moneta è lanciata due volte si ha $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$ e per n prove ripetute Ω è formato da 2^n eventi elementari equiprobabili, con probabilità $1/2^n$. Sulla base del risultato espresso dalla (1.1), si verifica subito che nei lanci ripetuti della moneta si ha:

$$P\{C \text{ nel secondo di due lanci }\} = 1/2$$

$$P\{C \text{ nei primi due di tre lanci }\} = 1/4$$

$$P\{T \text{ in due qualsiasi di quattro lanci }\} = 3/8$$

$$P\{T \text{ per la prima volta all'n-esimo lancio }\} = 1/2^n. \qquad \triangleleft$$

Esempi

ESEMPIO 1.4

Nel lancio di una moneta, i possibili eventi elementari sono soltanto due: $T = \{$esce "testa"$\}$ e $C = \{$esce "croce"$\}$. Lo spazio campione associato ad una singola prova è $\Omega = \{TC\}$; se la moneta è lanciata due volte si ha $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$ e per n prove ripetute Ω è formato da 2^n eventi elementari equiprobabili, con probabilità $1/2^n$. Sulla base del risultato espresso dalla (1.1), si verifica subito che nei lanci ripetuti della moneta si ha:

$$P\{C \text{ nel secondo di due lanci }\} = 1/2$$

$$P\{C \text{ nei primi due di tre lanci }\} = 1/4$$

$$P\{T \text{ in due qualsiasi di quattro lanci }\} = 3/8$$

$$P\{T \text{ per la prima volta all'n-esimo lancio }\} = 1/2^n. \qquad \triangleleft$$

Esempi

ESEMPIO 1.5: DISTRIBUZIONE UNIFORME IN $[0,T]$

Estendiamo al caso continuo il risultato dell'Esempio 1.3. Supponiamo che lo spazio campione sia l'intervallo $[0,T] \in \mathbb{R}$ e che gli eventi A_i relativi ad un esperimento casuale siano una infinità numerabile di intervalli in $[0,T]$. Supponiamo inoltre che si richieda di assegnare *uguali probabilità ad eventi definiti da intervalli di uguale ampiezza*. Questa ipotesi implica la definizione di una *distribuzione uniforme* di probabilità in $[0,T]$, e determina univocamente $P(A_i)$. Infatti, se pensiamo di suddividere Ω in n intervalli I di eguale ampiezza T/n e senza elementi comuni, per l'assioma II' la loro probabilità vale $P(I) = 1/n$. Un evento A definito dalla unione di k intervalli I ha probabilità

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{kT}{nT} = \frac{L(A)}{L(\Omega)},$$

uguale al rapporto tra le ampiezze $L(A), L(\Omega)$ degli intervalli A ed Ω. In particolare, se Ω è l'intervallo unitario, $P(A)$ coincide con la misura di Lebesgue di A. E poiché la misura di Lebesgue è una funzione continua degli intervalli, se ne deduce il seguente risultato.