Statistica
A.A. 2019/2020
CdL Scienze Economiche

Prof. Massimiliano Ferrara
Dott. Bruno Antonio Pansera

Lezione n.2

Calcolo Combinatorio

Tipologie Fondamentali di Raggruppamento

- DISPOSIZIONI
  - semplici
  - con ripetizione
- PERMUTAZIONI
  - semplici
  - con ripetizione
- COMBINAZIONI
  - semplici
  - con ripetizione

Calcolo Combinatorio: Introduzione

Il Calcolo Combinatorio è una branca della matematica applicata utilizzata per affrontare discipline più ampie e più complesse tra cui la teoria della Probabilità e la Statistica.
Fornisce gli strumenti di calcolo per la costruzione e la misurazione del numero di raggruppamenti diversi che si possono comporre, prendendo una determinata quantità di elementi in un dato insieme, in modo che siano rispettate determinate regole.

Calcolo Combinatorio: Introduzione

Paolo Albani - La letteratura come gioco combinatorio-Mi ha sempre affascinato il fatto che una lingua riesca a produrre e riconoscere un numero potenzialmente infinito di frasi partendo da un numero finito di unità di base (fonemi) e con un numero finito di regole sintattiche, come sottolinea Noam Chomsky parlando dell'«aspetto creativo dell'uso del linguaggio». L'idea del linguaggio come macchina combinatoria, capace di produrre un'infinità di parole e testi, non è nuova, precisa Chomsky. Si trova già contenuta in Wilhelm von Humboldt (1767-1835), grande linguista tedesco, quando afferma che una lingua «fa uso infinito di mezzi finiti» e prima ancora nei grammatici di Port-Royal per i quali il linguaggio è una «meravigliosa invenzione capace di comporre con venticinque o trenta suoni un'infinita varietà di parole».Se vogliamo è lo stesso concetto espresso da Jorge Luis Borges in *La biblioteca di Babele*.

Calcolo Combinatorio: Introduzione

Il Calcolo Combinatorio o Combinatoria viene pertanto definito come “l’arte di contare…senza contare” mettendo in evidenza la maggiore importanza che in combinatoria ha la conoscenza del numero di combinazioni, rispetto alla conoscenza delle combinazioni stesse.

Significato e origine

Gli enigmi creano dipendenza. Uno dei primi nella storia a essere affetto da questa dipendenza fu niente meno che **Carlo Magno** (742-814), fondatore del Sacro Romano Impero, il qual sviluppò una tale mania per gli enigmi da assumere un esperto perché ne creasse appositamente per lui. La persona a cui venne affidato l'incarico fu il celebre studioso ed ecclesiastico inglese **Alcuino di York.**

Significato e origine

Alcuino di York (735-804) è stato un filosofo, teologo e beato anglosassone. Alcuino fu uno dei principali artefici del Rinascimento carolingio: insegnò soprattutto grammatica e arti liberali.

da wikipedia

Alcuino raccolse cinquantasei degli enigmi inventati per Carlo Magno in un manuale educativo, dal titolo

"Propositiones ad acuendos juvenes"

(problemi per rendere acuta la mente dei giovani), con l'intento di stimolare l'interesse per la matematica nei giovani del suo tempo.

Significato e origine: L’eningma dell’attravesamento del fiume

“Un viaggiatore si avvicina alla sponda di un fiume con un lupo, una capra e un cavolo. Con grande disappunto, nota che c’è solo una barca per attraversare il fiume, sulla quale c’è spazio solo per due: il viaggiatore e uno dei due animali oppure il cavolo. Come il viaggiatore ben sa, se li lascia insieme da soli, la capra mangerà il cavolo e il lupo mangerà la capra. Il lupo però non mangia i cavoli. Come può il viaggiatore portare tutti gli animali e il cavolo sull’altra riva, nel minor numero possibile di viaggi avanti e indietro?”

Calcolo Combinatorio

Il calcolo combinatorio si occupa di determinare dato un insieme finito

$$A=(a_{1,}\ a_{2,}\ a_{3,\ldots\ldots}\ a_n)$$

di *n* elementi distinti, quanti raggruppamenti formati ciascuno da k componenti si possono costruire utilizzando gli elementi di A.

Quindi dati *n* numeri naturali e *k* numero di elementi costituenti ciascun raggruppamento, si vuole calcolare l’insieme dei raggruppamenti.

Calcolo Combinatorio

Vanno distinti i casi in cui l'ordinamento degli elementi nelle diverse configurazioni è importante (disposizioni e permutazioni) rispetto al caso in cui non lo è (combinazioni).
Uno stesso elemento può comparire più di una volta all'interno di una stessa configurazione (disposizioni con ripetizione, permutazioni con ripetizione e combinazioni con ripetizione) rispetto al caso in cui questo non può avvenire (disposizioni semplici, permutazioni semplici e combinazioni semplici)

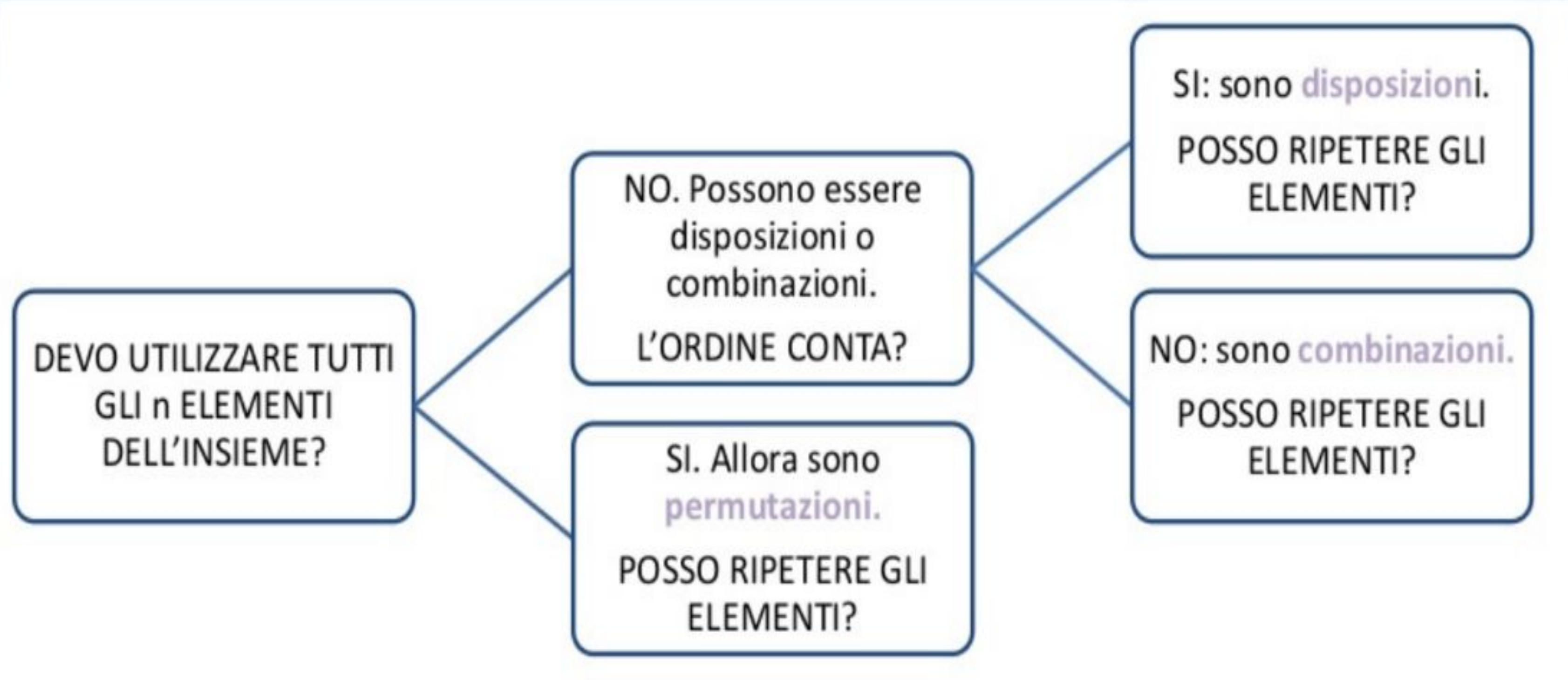
Calcolo Combinatorio

I raggruppamenti si possono formare senza ripetizione o con ripetizione degli oggetti.

- SEMPLICI: quando gli oggetti sono tutti diversi
- CON RIPETIZIONE: quando gli oggetti vi figurano una o più volte

Calcolo Combinatorio: Introduzione

In base a quale logica raggruppo gli elementi?



Calcolo Combinatorio: Esempi

Ad esempio, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi 7 alunni possono sedersi su 5 sedie, gli *n* oggetti sono i 7 alunni, il numero *k* di posti sono le 5 sedie e non c'è ripetizione di oggetti poiché gli alunni sono tutti diversi.

Ancora, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi si possono collocare 10 palline di cui 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi, in 3 scatole, gli *n* oggetti sono le 10 palline, il numero *k* di posti sono le 3 scatole e c'è ripetizione di oggetti poiché di palline ce ne sono 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi.

Disposizioni

Sia dato un insieme A = $(a_{1,}\ a_{2,}\ a_{3,\ \ldots\ldots}\ a_n)$ finito e non vuoto costituito da *n* elementi distinti.

Si definiscono *disposizioni* degli *n* elementi di A a gruppi di *k* tutti i raggruppamenti di *k* elementi scelti da A, dove ciascun raggruppamento differisce dagli altri per:

- gli elementi costituenti il raggruppamento
- l'ordine degli elementi costituenti il raggruppamento nel caso gli elementi siano gli stessi.

Fattoriale

n! è il fattoriale di n (per convenzione 0! = 1), un modo compatto per indicare il prodotto dei numeri naturali da 1 a n:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

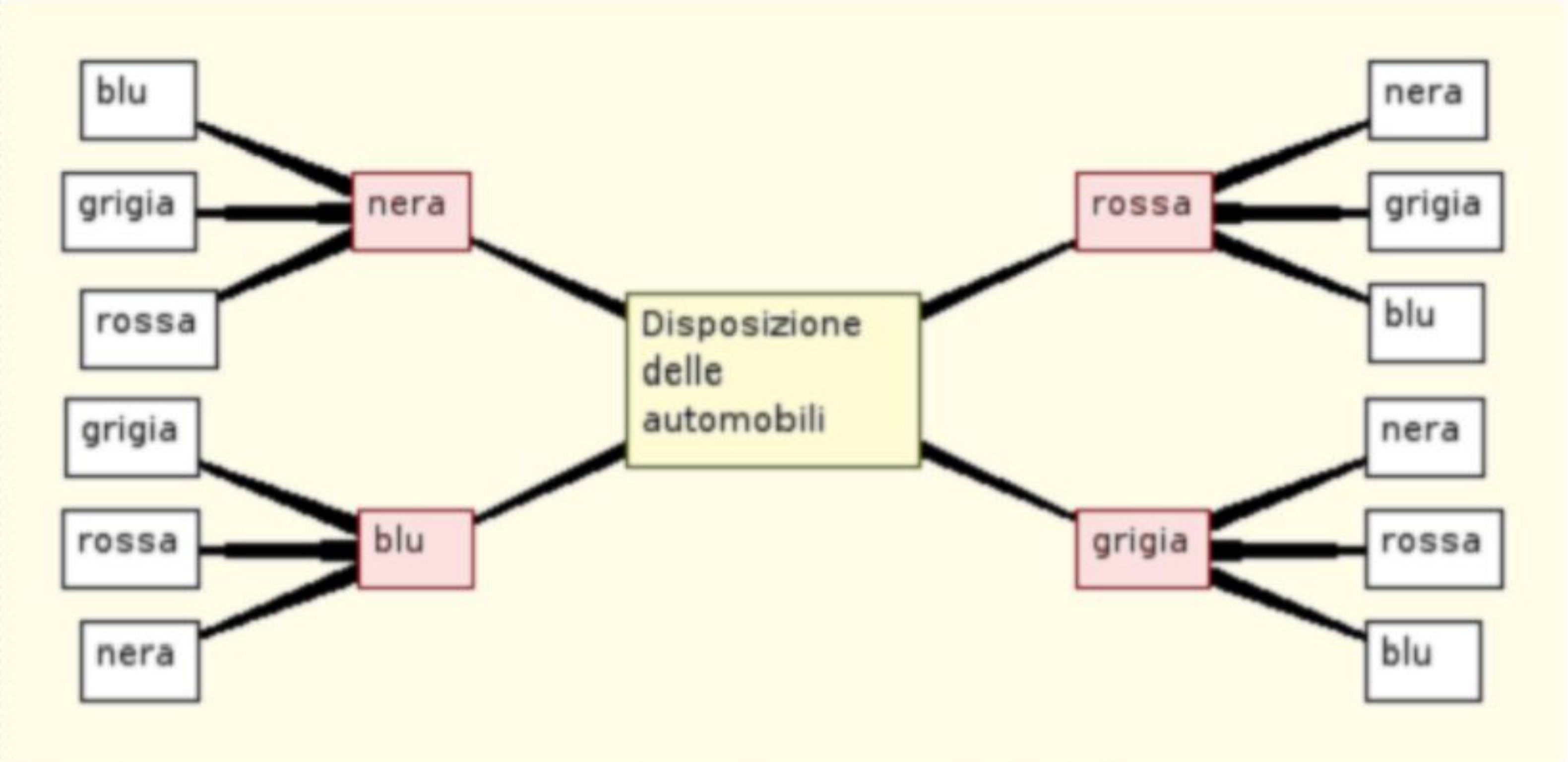
Il fattoriale di un numero naturale indica il prodotto del numero per tutti i suoi antecedenti

Disposizioni Semplici

Problema:

Un concessionario di automobili vuole esporre nella vetrina del suo salone quattro vetture tutte dello stesso tipo ma con 4 colori diversi (blu, grigio, rosso e nero). La vetrina però dispone di soli due posti: uno fisso e l'altro fornito di una piattaforma rotante. Il concessionario desidera sapere in quanti modi diversi è possibile disporre le auto.

Disposizioni Semplici



Si hanno le seguenti 12 possibilità:

NB, NG, NR, BG, BR, BN, RN, RG, RB, GN, GR, GB

Disposizioni Semplici

Si parla di disposizioni semplici se ogni oggetto compare al più una sola volta nello stesso raggruppamento, cioè non può mai essere ripetuto.

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti, della classe *k*, si indica con il simbolo $D_{n,k}$ il cui valore è dato nel modo seguente:

$$D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}_{k\ fattori}$$

Disposizioni Semplici

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti della classe k, è uguale al prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti dei quali il primo è n.

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Esempio: In quanti modi diversi i 28 alunni di una classe si possono disporre a coppie nei banchi di un'aula?

$$D_{28,\ 27}=28\cdot 27=756.$$

Disposizioni Semplici

Esempio: Ai Mondiali 2018 si erano qualificate 32 squadre. Quanti erano i possibili ordini di arrivo nelle prime tre posizioni?

Il risultato `e dato dal numero di disposizioni semplici di 32 elementi di classe 3:

$$32!/(32-3)! = 29\ 760.$$

Disposizioni con ripetizione

Chiamiamo disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti diversi tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscono o per gli oggetti contenuti o per l'ordine con cui gli oggetti compaiono o per il numero di ripetizioni di ogni oggetto.
Pertanto se ogni oggetto può comparire più volte nel gruppo $k \gtrless n$ si parla di **disposizioni con ripetizione**.

Il numero delle disposizioni con ripetizione di *n* elementi di classe *k* (con k $\gtrless$ n), che si indica con il simbolo $D^{r}_{n,k}$ è dato da: $\boxed{D^{(r)}_{n,k} = n^k}$

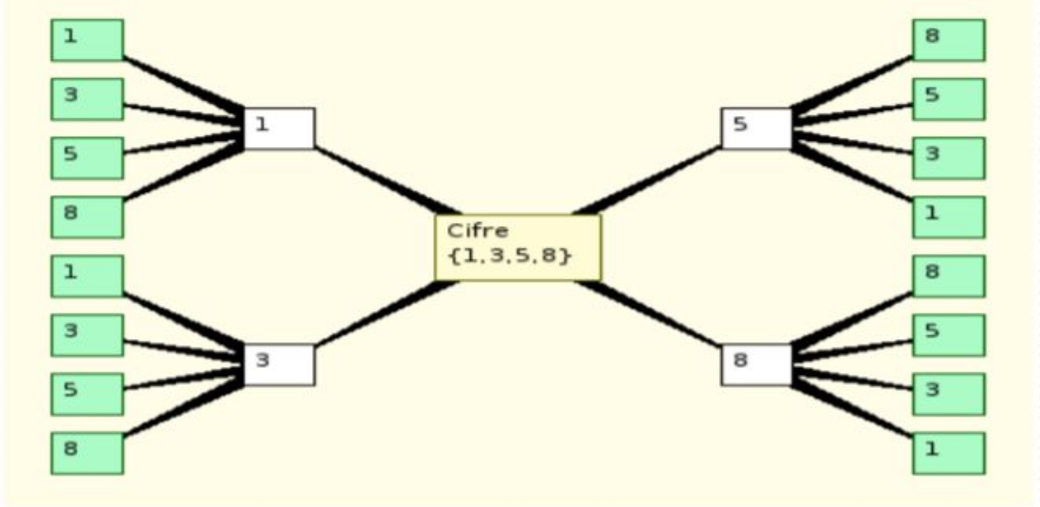
Disposizioni con ripetizione

Problema:

Consideriamo l'insieme:

$$A = \{1,3,5,8\}$$

vogliamo determinare quanti numeri a due cifre si possono scrivere con gli elementi di A, considerando che sono ammesse le ripetizioni.



Disposizioni con ripetizione

Riferendoci anche alla solita rappresentazione ad albero, si intuisce facilmente che si hanno *n* possibilità per scegliere il primo componente, n per il secondo ed altrettante per il terzo e così via sino al k - esimo che completa la configurazione.

Il numero cercato è pertanto:

$$\mathbf{n \times n \times n \times \ldots \times n}$$

k volte, ossia $\mathbf{n^k}$, in formula

$$\boxed{D'_{n,k} = n^k}$$

Disposizioni con ripetizione

Se lanciamo una moneta quattro volte, quanti sono gli esiti possibili, tenendo conto dell'ordine dei lanci?

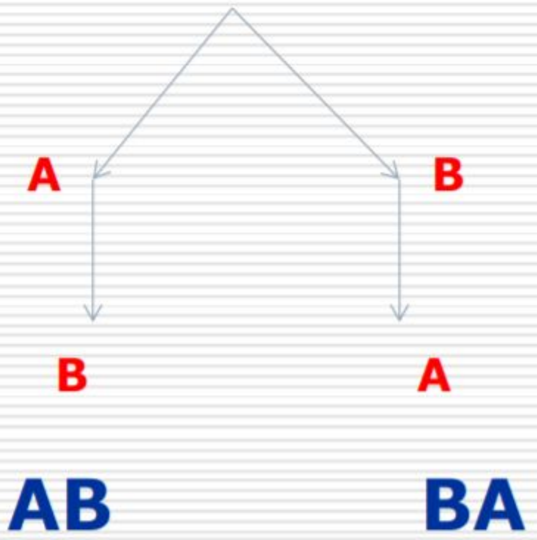
Se facciamo riferimento alle disposizioni con ripetizione di due elementi (testa/croce), a quattro a quattro, otteniamo:

$$D^{r}_{2,4}=2^4=16.$$

Permutazioni semplici

Problema:

A teatro vogliamo contare in quanti modi possiamo far sedere due persone su due sedie. La prima persona sarà indicata con A, la seconda con B.

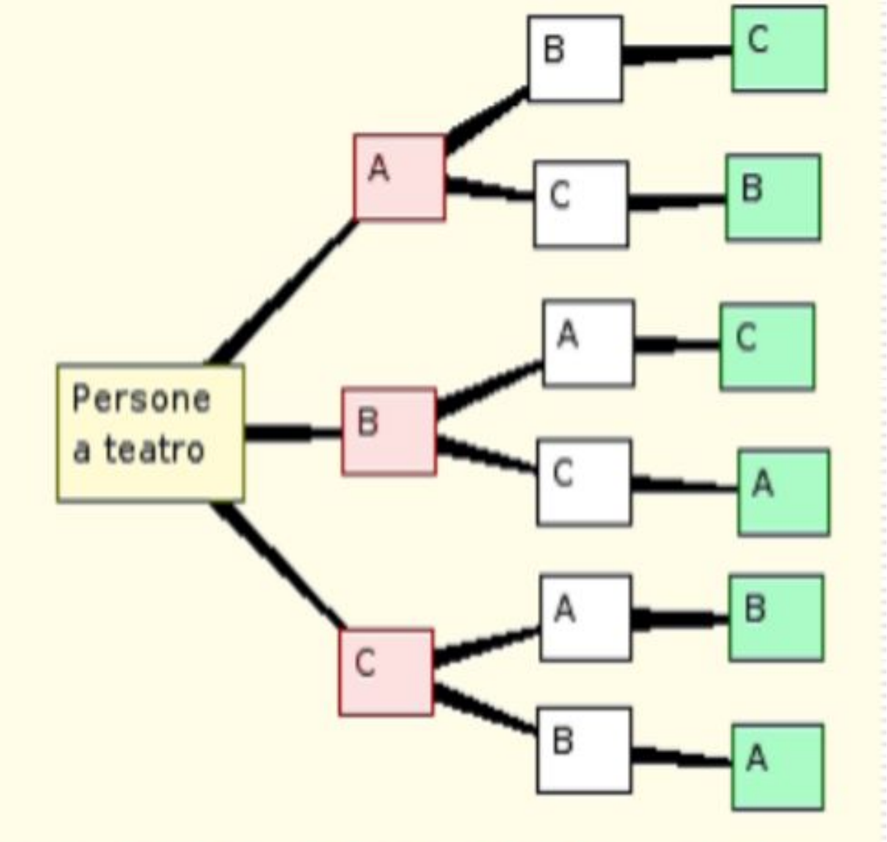


Le 2 possibili soluzioni : AB, BA.

Permutazioni semplici

Problema:

A teatro vogliamo contare in quanti modi possiamo far sedere tre persone su tre sedie. La prima persona sarà indicata con A, la seconda con B e la terza con C.



Le 6 possibili soluzioni : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

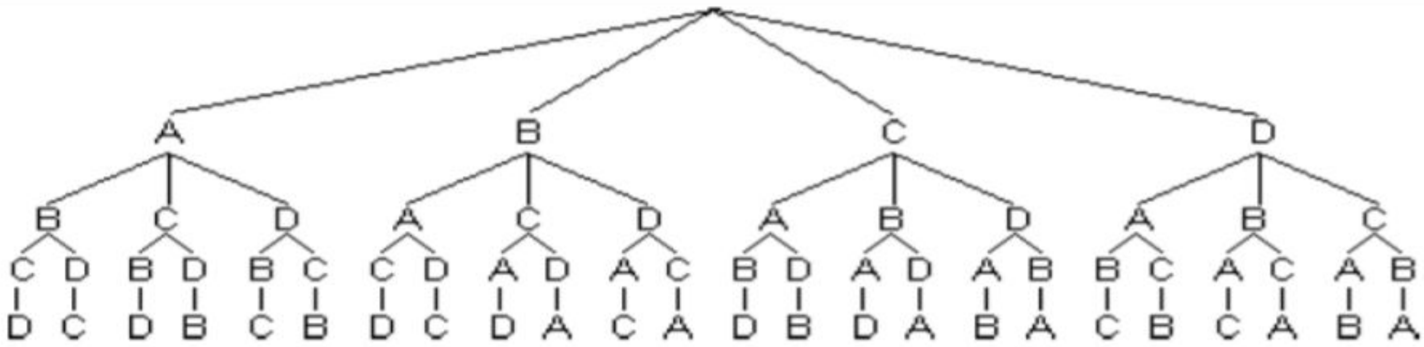
Permutazioni semplici

Problema:

A teatro vogliamo contare in quanti modi possiamo far sedere 4 persone su 4 sedie. La prima persona sarà indicata con A, la seconda con B, la terza con C e la quarta con D.

Le 24 possibili soluzioni :

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA



Permutazioni semplici

Le permutazioni semplici altro non sono che le disposizioni di *n* oggetti presi ad *n* ad *n*.

Ossia, dato un insieme di n oggetti, si dicono *permutazioni* di tali n oggetti tutti i gruppi che si possono formare con gli n oggetti dati prendendoli tutti. Se ne deduce allora che le permutazioni semplici differiscono soltanto per l'ordine con cui sono disposti gli n oggetti distinti contenuti nei vari raggruppamenti.

Quando *k=n* le disposizioni prendono il nome di permutazioni.

Il numero di permutazioni semplici di n elementi è dato da: $\boxed{P_n = n!}$

Permutazioni con ripetizioni

Dato un insieme con n elementi di cui n_1 uguali tra loro, n_2 uguali tra loro e diversi dai precedenti,..., n_k uguali tra loro e diversi dai precedenti, le permutazioni con ripetizione di questi n oggetti sono gli allineamenti che si possono formare considerando ogni volta tutti gli oggetti dati.

Una *permutazione* degli *n* elementi i dell'insieme A si dice *con ripetizione* se almeno un elemento viene ripetuto un prefissato numero di volte $K_i > 1$ all'interno di ciascun raggruppamento.

Permutazioni con ripetizioni

In generale, dato un insieme di n elementi dei quali α uguali fra loro, β uguali fra loro, ecc., il **numero delle permutazioni distinte con elementi ripetuti** che si possono ottenere è dato da

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots)} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\dots}.$$

Esercizio 1

Negli anagrammi della parola MATEMATICA si ripetono tre lettere A, due M e due T. In tal caso parleremo di permutazioni con ripetizioni; nella fattispecie scriveremo

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 4\cdot 4} = 151.200$$

Generalizzando, si ha la formula

$$P_{n}^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

Esercizio 2

Uno giovane sogna che i risultati finali di cinque particolari partite di calcio sono due pareggi (segno X) e 3 vittorie casalinghe (segno 1). Tuttavia, non ricorda l'esatto abbinamento partita/risultato.

Volendo essere sicuro di vincere, quante schede da una colonna deve giocare?

Soluzione. Ognuna delle colonne è una cinquina di due segni X e tre segni 1, si tratta, quindi, delle permutazioni di 5 elementi con ripetizioni di due X e tre 1.

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Esercizio 4

In uno showroom si devono esporre affiancati tra loro in ogni modo possibile 9 modelli di Ferrari d'epoca di tre colori diversi : 4 rosse, 3 nere e 2 gialle. Calcolare in quanti modi si possono sistemare tenendo conto del solo colore.

Soluzione. Sono le permutazioni con ripetizioni di nove auto con ripetizioni di 4 rosse, 3 nere e 2 gialle.

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

Combinazioni

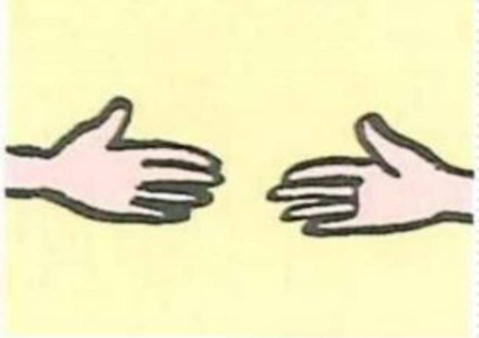
Sia dato un insieme A = ($a_{1,}$ $a_{2,}$ $a_{3, \ldots\ldots}$ a_n) finito e non vuoto costituito da *n* elementi distinti.

Si definiscono *combinazioni* degli *n* elementi di A a gruppi di *k* tutti i raggruppamenti di *k* elementi scelti da A, dove ciascun raggruppamento differisce dagli altri per gli elementi costituenti il raggruppamento, quindi <u>l'ordine è ininfluente.</u>

Combinazioni semplici

Problema:

Determinare il numero di strette di mano che di scambiano n persone.



PERSONE:	STRETTE DI MANO:
A	—
A B	A B
A B C	AB AC BC
A B C D	AB AC AD BC BD CD

Combinazioni semplici

Una *Combinazioni* degli *n* elementi di A a gruppi di *k* si dice *semplice* se ogni elemento compare al più una volta nello stesso raggruppamento, cioè non può essere ripetuto.

Il numero di combinazioni degli *n* elementi di A a gruppi di *k* semplice è dato da:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinazioni semplici: Coefficiente Binomiale

Il numero delle combinazioni semplici è spesso indicato con il simbolo seguente:

$$\binom{n}{k}$$

Che si legge «n su k» e viene detto **COEFFICIENTE BINOMIALE**

Combinazioni semplici: Coefficiente Binomiale

Proprietà:

1. $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

2. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

3. $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$ **Formula di Stifel**

Il ***coefficiente binomiale*** è detto tale perché se ne fa uso nello sviluppo della potenza di un binomio. Consideriamo due numeri reali qualunque a e b. Sono note le formule:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b + 4ab^2 + 1b^4
\end{aligned}
$$

o sviluppo della potenza del binomio con il **metodo di Newto**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Scriviamo i coefficienti binomiali disponendoli in un triangolo illimitato, **Triangolo di Tartaglia** o di **Pascal**, nel modo seguente

$$\binom{0}{0}$$

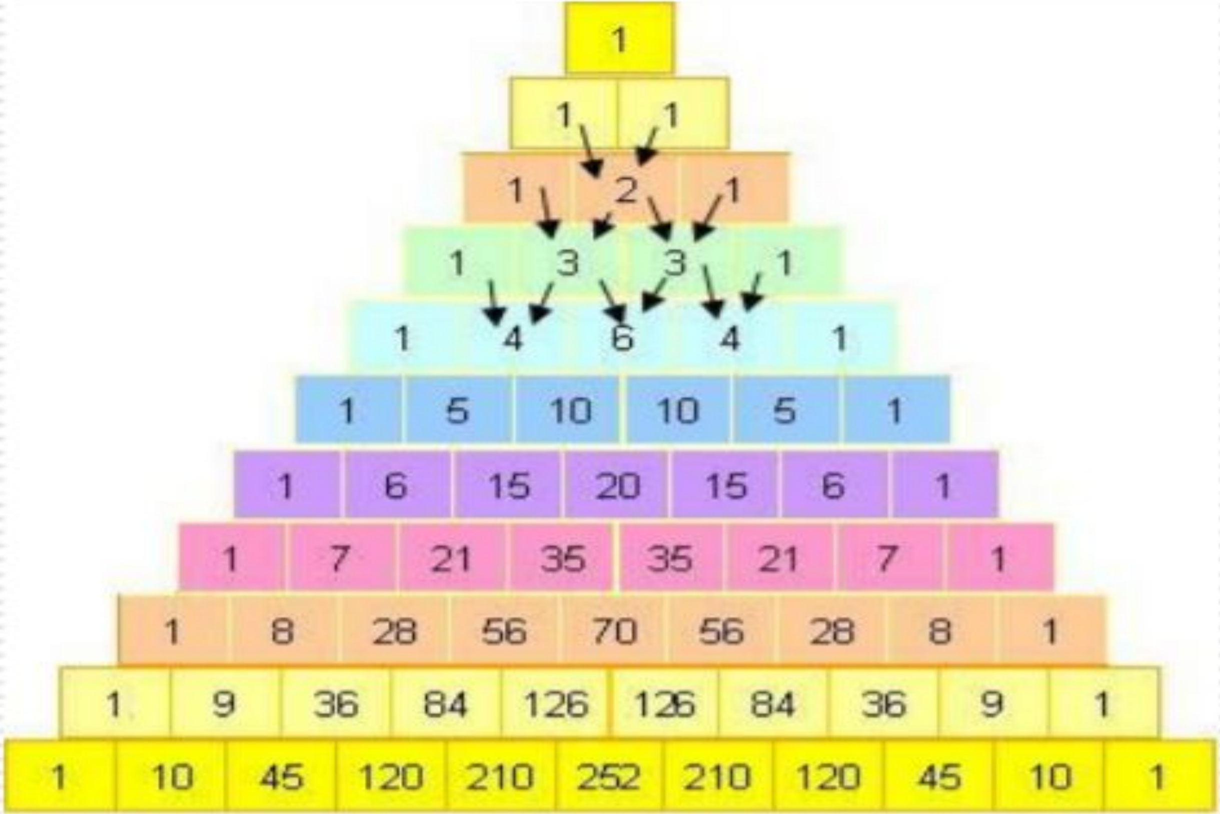
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Combinazioni con ripetizione

Problema:

Dato l'insieme:

$$A = \{a, b, c\}$$

Determinare i 'sottoinsiemi' di A con 1, 2 e 3 elementi, con ripetizione.

Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni di classe 1, con ripetizione, sono **tre** :

(a)(b) (c)

Le combinazioni di classe 2, con ripetizione, sono **sei** :

(a, a) (a, b) (a, c) (b, b) (b, c) (c, c)

Le combinazioni di classe 3, con ripetizione, sono **dieci** :

(a, a, a) (a, a, b) (a, a, c) (a, b, b) (a, b, c)
(a, c, c) (b, b, b) (b, b, c) (b, c, c) (a, c, c)

Combinazioni con ripetizione

Chiamiamo *combinazioni con ripetizione* di n oggetti di classe k, le configurazioni che si possono formare considerando k oggetti tra gli n dati, considerando distinte due configurazioni che differiscono per gli oggetti contenuti o per il numero di ripetizioni di ogni oggetto, ma non per l'ordine degli oggetti.

Pertanto una *Combinazioni* degli *n* elementi di A a gruppi di *k* si dice *con ripetizione* se ciascun elemento di *A* può comparire più volte nello stesso raggruppamento, cioè può essere ripetuto

Combinazioni con ripetizione

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Combinazioni con ripetizione

Nell'esempio precedente:

$$C'_{3,2} = \frac{(3+2-1)!}{2!\,(3-1)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 6$$

$$C'_{3,3} = \frac{(3+3-1)!}{3!\,(3-1)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 10\,.$$

PERMUTAZIONI
(considero tutti gli n elementi)

- semplici:
  $$n!$$
- con ripetizione:
  $$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \ldots}$$

DISPOSIZIONI
(k elementi su n, l'ordine conta)

- semplici:
  $$\frac{n!}{(n-k)!}$$
- con ripetizione:
  $$n^k$$

COMBINAZIONI
(k elementi su n, l'ordine non conta)

- semplici:
  $$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
- con ripetizione:
  $$\frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Esercizi

- Quanti possibili anagrammi si possono determinare (anche senza significato) della parola PANE? Mentre gli anagrammi di OTTO?
- Nel gioco del poker, a un giocatore vengono assegnate 5 carte prese a caso da un mazzo da 52. Quante sono le possibili carte che un giocatore può avere in mano?
- Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Si eseguono 5 estrazioni rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle 5 estrazioni? Quanti sono gli allineamenti in cui non compare il numero 20?
- Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Si eseguono 5estrazioni senza ripetizione. Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle 5 estrazioni? E quanti quelli in cui non compare il numero 20?

Esercizi

- Si vuole costituire un comitato id 5 membri sceltri tra 10 persone. Quanti differenti comitati si possono formare?
- Un'urna contiene 100 palline, di cui 30 sono bianche e 70 sono rosse. Si vuole conoscere la probabilità di estrarre 5 palline bianche in una successione di 10 estrazioni senza ripetizione.
- Quanti codici si possono formare utilizzando tre cifre e due lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere), se le lettere occupano le prime due posizioni, considerando che cifre e lettere possono ripetersi? Quanti condici presentano qualche ripetizione?